Арифметическая прогрессия (3ч)

Цель: рассмотреть частный вид последовательности - арифметическую прогрессию.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение возрастающей последовательности.

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \frac{3n-2}{n+1}$. Найдите a_1, a_5, a_{10}.

3. Последовательность (a_n) задана формулой $a_{n+1} = 3 - 2a_n$, где $a_1 = 2$ и $n \geq 1$. Найдите первые четыре члена последовательности.

Вариант 2

1. Определение убывающей последовательности.

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \frac{3-2n}{n+2}$. Найдите a_1, a_5, a_{10}.

3. Последовательность (a_n) задана формулой $a_{n+1} = 3a_n - 2$, где $a_1 = 2$ и $n \geq 1$. Найдите первые четыре члена последовательности.

III. Изучение нового материала

1. Основные понятия

Из всех последовательностей наиболее изучены две: *арифметическая прогрессия* и *геометрическая прогрессия*, которые будут рассмотрены в этой главе. Сначала рассмотрим арифметическую прогрессию.

Последовательность чисел a_n, каждый член которой (начиная со второго) равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d *(разностью прогрессии), называется арифметической прогрессией*: $a_{n+1} = a_n + d$ $(n \geq 1)$. При $d > 0$ арифметическая прогрессия возрастает, при $d < 0$ - убывает.

Пример 1

Найдем первые пять членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 5$, $d = 2$.

Из определения арифметической прогрессии $a_{n+1} = a_n + d$ получаем: при $n = 1$ $a_2 = a_1 + d = 5 + 2 = 7$, при $n = 2$ $a_3 = a_2 + d = 7 + 2 = 9$, при $n = 3$ $a_4 = a_3 + d = 9 + 2 = 11$, при $n = 4$ $a_5 = a_4 + d = 11 + 2 = 13$.

Итак, эти члены 5, 7, 9, 11, 13.

2. Формула n*-го числа арифметической прогрессии*

В определении арифметической прогрессии использована рекуррентная формула $a_{n+1} = a_n + d$. Удобнее получить формулу n-го члена.

Пример 2

Получим формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Из определения арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$ запишем $(n - 1)$ равенство:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_2 + d \\ a_4 = a_3 + d \\ \ldots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + d \\ a_n = a_{n-1} + d \end{array}\right\} n-1.$$

Сложим эти равенства, тогда в левой и правой частях сокращаются одинаковые члены: $a_2, a_3, ..., a_{n-1}$, и получаем: $a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1} = a_1 + d(n-1).$

Таким образом, получена важнейшая формула - *формула n-го члена* арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1).$

Как правило, задачи на эту тему достаточно простые. Наиболее распространенный прием решения таких задач - записать условия задачи, используя в качестве неизвестной первый член и разность прогрессии.

Пример 3

В арифметической прогрессии сумма второго и пятого членов равна 8, а третьего и седьмого равна 14. Найдем прогрессию.

Выразим все члены прогрессии через ее первый член и разность: $a_2 = a_1 + d, a_5 = a_1 + 4d, a_3 = a_1 + 2d, a_7 = a_1 + 6d$ - и запишем условия задачи: $8 = a_2 + a_5 = (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 5d, 14 = a_3 + a_7 = 2a_1 + 8d.$ Для определения a_1 и d получаем линейную систему уравнений: $\begin{cases} 8 = 2a_1 + 5d, \\ 14 = 2a_1 + 8d. \end{cases}$ Вычитая из второго уравнения первое, найдем: $6 = 3d$ или $d = 2$, и из любого из уравнений: $a_1 = -1$.

Пример 4

Первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, ...$ равен единице. При каком значении разности прогрессии d величина $S = a_1a_2 + a_2a_3$ имеет минимальное значение?

Как и в предыдущей задаче выразим члены прогрессии a_2 и a_3 через первый член ($a_1 = 1$) и разность d: $a_2 = a_1 + d = 1 + d, a_3 = a_1 + 2d = 1 + 2d.$ Тогда $S = 1(1+ 2d) + (1 + d)(1 + 2d) = 2d^2 + 5d + 2.$ Функция S в зависимости от d является квадратичной функцией (параболой) и достигает минимального значения при $d = -\frac{5}{2\cdot 2} = -\frac{5}{4}.$

Пример 5

Найдем сумму чисел $\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}} + \frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}} + \frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{399}+\sqrt{400}}.$

Обратим внимание на то, что числа, стоящие под радикалами, образуют арифметическую прогрессию: 100, 101, 102, 103, ..., 399, 400. Умножим числители и знаменатели дробей на разность чисел, стоящих в знаменателях:

$$S = \frac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{(\sqrt{101}+\sqrt{100})(\sqrt{101}-\sqrt{100})} + \ldots + \frac{\sqrt{400}-\sqrt{399}}{(\sqrt{400}+\sqrt{399})(\sqrt{400}-\sqrt{399})} = \frac{\sqrt{101}-\sqrt{100}}{101-100} + \frac{\sqrt{102}-\sqrt{101}}{102-101} + \ldots + \frac{\sqrt{400}-\sqrt{399}}{400-399}.$$

За счет того, что числа образовали арифметическую прогрессию, знаменатели дробей оказались равными разности прогрессии, т. е. 1. Тогда имеем: $S=\sqrt{101}-\sqrt{100}+\sqrt{102}-\sqrt{101}+\sqrt{103}-\sqrt{102}+\ldots+\sqrt{400}-\sqrt{399}.$ Легко заметить, что в данной сумме сокращаются все числа, кроме $-\sqrt{100}$ и $\sqrt{400}$, и тогда сумма $S = -\sqrt{100} + \sqrt{400} = -10+20=10.$

Достаточно часто арифметическая прогрессия встречается в текстовых и геометрических задачах.

Пример 6

Четыре целых различных числа образуют арифметическую прогрессию. Одно из этих чисел равно сумме квадратов остальных трех чисел. Найдем эти числа.

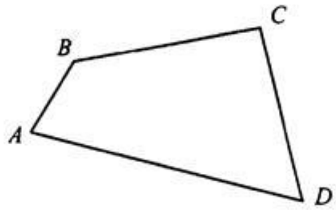
Пусть эти числа имеют вид: a; $a + d$; $a + 2d$, $a + 3d$ (очевидно, что a и d - целые числа). Запишем условие задачи: $a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 = a + 3d$ или $3a^2 + 6ad + 5d^2 = a$

+ 3d. Будем рассматривать это уравнение как квадратное, считая a неизвестной и d параметром. Запишем уравнение в виде: $3a^2 + a(6d - 1) + (5d^2 - 3d) = 0$. Чтобы это уравнение имело решение, необходима неотрицательность его дискриминанта D. Найдем $D = (6d-1)^2 - 4\cdot 3\cdot(5d^2 - 3d) = 36d^2 - 12d + 1 - 60d^3 + 36d = -24d^2 + 24d + 1 \ge 0.$ Решим это квадратное неравенство. Корни соответствующего уравнения $d = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{12} = \frac{6 \pm 6,5}{12}$, т. е. $d_1 \approx -0,04$ и $d_2 \approx 1,04$. Тогда решение неравенства $-0,04 \le d \le 1,04$. В этом промежутке есть два целых значения d = 1 и d - 0 (не подходит, так как даны различные числа).

Для d = 1 уравнение $3a^2 + a(6d - 1) + (5d^2 - 3d) = 0$ принимает вид: 3a + 5a + 2 = 0. Корни его $a_1 = -1$, $a_2 = -2/3$ (не подходит). Итак, искомые числа -1; 0; 1; 2.

Пример 7

Стороны четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Можно ли в него вписать окружность?



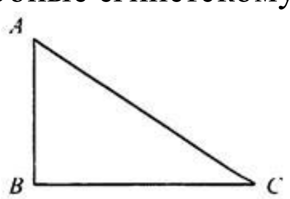
Пусть стороны четырехугольника AB, BC, AD, CD в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию с первым членом a и разностью d: AB = a, BC = a + d, AD = a + 2d, CD = a + 3d.

В четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны, т. е. AB + CD = BC + AD. Проверим это условие: a + (a + 3d) = (a + d) + (a + 2d). Так как равенство верное, то в такой четырехугольник можно вписать окружность. Но это возможно только в том случае, когда стороны четырехугольника образуют арифметическую прогрессию именно в следующем порядке: AB, BC, AD, CD.

Пример 8

Стороны прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдем стороны треугольника.

Пусть наименьший катет ΔABC AB = a, тогда второй катет BC = a + d и гипотенуза AC = a + 2d (где d - разность прогрессии, d > 0). Запишем теорему Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, или $(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2$, или $a^2 - 2ad - 3d^2 = 0$. Решая это однородное уравнение, получим: a = 3d и a = -d (не подходит). Имеем: AB = 3d, BC = 4d, AC = 5d (где d - любое число). То есть условию задачи удовлетворяют прямоугольные треугольники, подобные египетскому.



3. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии

Сумму первых n членов арифметической прогрессии можно найти по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$ или $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n.$

Пример 9

Получим формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Обозначим сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) через S_n. Запишем эту сумму дважды, расположив в первом случае члены в порядке возрастания их номеров, во втором случае - в порядке убывания номеров: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$; $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1$. Сложим эти равенства: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$. Покажем, что все суммы в скобках равны друг другу. Получаем:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$; $a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) =$
$= a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ и т. д.

Тогда имеем: $2S_n = (a_1 + a_n)\cdot n$, откуда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$ (первая формула получена). Используем формулу n-го члена $a_n = a_1 + d(n-1)$. Тогда имеем: $S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$ (вторая формула получена).

Пример 10

В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_8 = 27$. Найдем сумму первых сорока членов прогрессии.

Сначала найдем первый член a_1 и разность d прогрессии. Запишем условия задачи: $\begin{cases} a_1 + 2d = 7, \\ a_1 + 7d = 27. \end{cases}$ Из этой линейной системы уравнений находим $a_1 = -1$ и $d = 4$. Теперь найдем сумму первых сорока членов прогрессии: $S_{40} = \frac{2\cdot(-1) + 4\cdot(40-1)}{2}\cdot 40 = \frac{-2 + 4\cdot 39}{2}\cdot 40 = 154\cdot 20 = 3080.$

Пример 11

Найдем сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 4 дают остаток 3.

Первое число легко угадать: $a_1 = 103$. Легко также угадать несколько последующих таких чисел: $a_2 = 107$, $a_3 = 111$, $a_4 = 115$. Видно, что искомые числа образуют арифметическую прогрессию с первым членом 103 и разностью 4. Общий член этой прогрессии можно записать в виде $a_n = 103 + 4(n - 1) = 99 + 4n$.

Определим теперь число членов в сумме. Так как последнее трехзначное число 999, то получаем условие $a_n \leq 999$ или $99 + 4n \leq 999$. Решив это неравенство, найдем $n \leq 225$. Итак, в искомую сумму войдут 225 слагаемых. Найдем сумму 225 членов арифметической прогрессии с первым членом 103 и разностью 4: $S = \frac{2\cdot 103 + 4\cdot(225-1)}{2}\cdot 225 = 551\cdot 225 = 123975.$

Пример 12

Известно, что при любом n сумма S_n членов в некоторой последовательности (a_n) определяется по формуле: $S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = 4n^2 - 3n$. Докажем, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и напишем первые три члена этой прогрессии.

Для доказательства используем определение арифметической прогрессии. Сначала получим формулу общего члена последовательности (a_n). Очевидно, что $S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n$. Отсюда $a_n = S_n - S_{n-1} = (4n^2 - 3n) - [4(n-1)^2 - 3(n-1)] = 8n - 7$.

Рассмотрим разность двух соседних членов последовательности: $a_n - a_{n-1} = (8n - 7) - [8(n-1) - 7] = 8$. Отсюда получим: $a_n = a_{n-1} + 8$, т. е. каждый член последовательности равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 8. Итак, данная последовательность по определению является арифметической прогрессией.

Так как в процессе доказательства была получена формула общего члена этой арифметической прогрессии $a_n = 8n - 7$, то легко находим: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 17$.

Пример 13

Решим уравнение $2 + 5 + 8 + 11 + ... + x = 155$.

В левой части уравнения находится сумма членов арифметической прогрессии 2; 5; 8; 11; ..., первый член которой 2 и разность 3. Пусть в эту сумму входит n слагаемых. Тогда, используя формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии, получаем: $\frac{2+x}{2}n = 155.$ Второе уравнение получим, записав последний член этой суммы: $x = 2 + 3(n-1) = 3n - 1.$ Подставив второе уравнение в первое, придем к квадратному уравнению относительно n: $\frac{2+(3n-1)}{2}n = 155$ или $3n^2 + n - 310 = 0$, корни которого $n = 10$ и $n = -\frac{31}{3}$ (не подходит, так как n - число натуральное). После этого находим: $x = 3 \cdot 10 - 1 = 29$. Итак, $x = 29$ - единственный корень данного уравнения.

Пример 14

Два велосипедиста, расстояние между которыми 99 м, одновременно начинают движение навстречу друг другу. Первый велосипедист за каждую секунду проезжал по 5 м. Второй велосипедист за первую секунду проехал 1,5 м, а за каждую последующую - на 0,5 м больше, чем за предыдущую. Через какое время велосипедисты встретились?

Пусть велосипедисты встретились через n секунд. Тогда первый из них проехал до встречи 5n (м). Для второго велосипедиста расстояния, проезжаемые в каждую секунду, образуют арифметическую прогрессию: 1,5; 2; 2,5; 3; ... . Тогда за n секунд он проедет расстояние: $\frac{2 \cdot 1{,}5 + 0{,}5(n-1)}{2}n = \frac{2{,}5 + 0{,}5n}{2}n.$

Сумма расстояний, пройденных велосипедистами, равна 99 м. Получаем уравнение: $5n + \frac{2{,}5 + 0{,}5n}{2}n = 99$ или $n^2 + 25n - 396 = 0$, корни которого $n_1 = 11$ и $n_2 = -36$ (не подходит). Итак, встреча произошла через 11 с.

4. Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Отметим еще одно важное свойство членов арифметической прогрессии. Любой член прогрессии (начиная со второго) равен полусумме соседних членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $(n \geq 2)$ (характеристическое свойство).

Пример 15

Докажем характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Используя определение арифметической прогрессии, получим: $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n.$

Достаточно часто при решении задач рассматриваемой темы используется *характеристическое свойство* арифметической прогрессии.

Пример 16

При каких значениях x числа 6; x^2; x образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию? Найдем эти числа.

Запишем свойство арифметической прогрессии: $2x^2 = 6 + x$. Получаем квадратное уравнение, корни которого $x = -3/2$ и $x = 2$. Тогда искомыми числами будут $6;\ \frac{9}{4};\ -\frac{3}{2}$ или 6; 4; 2.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение арифметической прогрессии.
2. Формула n-го члена арифметической прогрессии.
3. Характеристическое свойство арифметической прогрессии.
4. Сумма первых n членов арифметической прогрессии.

V. Задание на уроках

§ 16, № 4 (а, б); 6 (г); 8; 12 (в); 17 (б); 19 (а); 28 (а, б); 30; 33 (а); 36 (б); 42 (а); 43; 48 (б); 50 (а); 53 (б); 56 (г); 61; 68 (а); 69 (б).

VI. Задание на дом

§ 16, № 4 (в, г); 6 (в); 9; 12 (г); 17 (г); 19 (б); 28 (в, г); 31; 33 (б); 36 (в); 42 (б); 44; 48 (г); 50 (б); 53 (г); 56 (б); 62; 68 (б); 69 (а).

VII. Подведение итогов уроков