Четные и нечетные функции (3ч)

Цель: обсудить свойства и графики некоторых функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Функция, возрастающая на промежутке.

2. Понятие нечетной функции и ее свойство.

3. Найдите область определения, область значений, монотонность и четность функции $y = 3/x$ (с обоснованием). Постройте график функции.

Вариант 2

1. Функция, убывающая на промежутке.

2. Понятие четной функции и ее свойство.

3. Найдите область определения, область значений, монотонность и четность функции $y = -2/x$ (с обоснованием). Постройте график функции.

III. Изучение нового материала

Теперь необходимо вспомнить основные свойства и графики некоторых ранее изученных функций (свойства надо представлять, но запоминать не стоит).

1. Линейная функция $y = kx + m$

1. Область определения - множество всех чисел $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Графиком функции является прямая линия.

3. График функции пересекает ось абсцисс в точке $x = -m/k$ (при $k \neq 0$) и параллелен оси абсцисс при $k = 0$. График функции пересекает ось ординат в точке $y = m$.

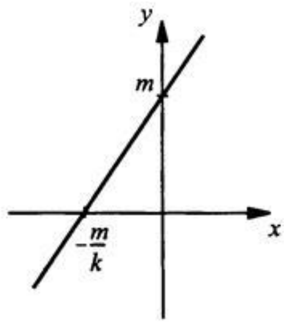
4. Функция возрастает при $k > 0$, убывает при $k < 0$ и постоянна при $k = 0$.

5. Функция неограниченна при $k \neq 0$ и ограничена при $k = 0$.

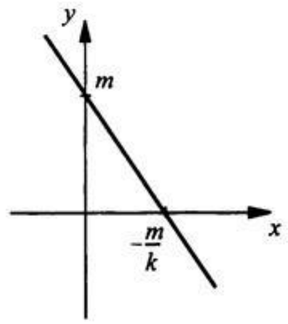
6. Функция определенной четности не имеет при $m \neq 0$, нечетная при $m = 0$ и четная при $k = 0$.

7. Область значений - множество всех чисел при $k \neq 0$ и $y = m$ при $k = 0$.

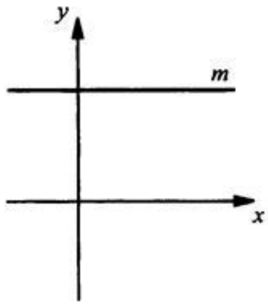
8. При $m = 0$ функцию $y = kx$ называют прямой пропорциональностью.



$k > 0$



$k < 0$



$k = 0$

Пример 1

Найдем условие, при котором линейная функция y = kx + m является: а) нечетной; б) четной.

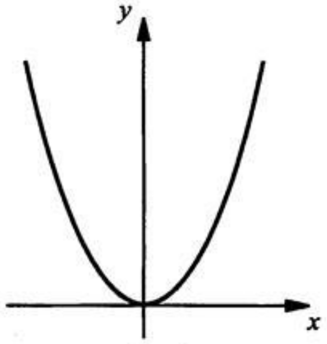
Область определения функции x ∈ (-∞; +∞) - симметричная. Найдем значение $y(-x) = k \cdot (-x) + m = -kx + m.$

а) Если функция нечетная, то y(-x) = -y(x). Получаем: -kx + m = -(kx + m), или m = -m, или 2m = 0, откуда m = 0.

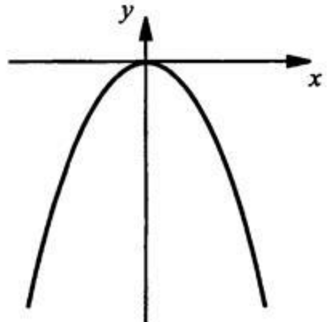
б) Если функция четная, то y(-x) = y(x). Получаем: -kx + m = kx + m или 0 = 2kx, откуда k = 0 (так как x - любое число, не равное нулю).

2. Квадратичная функция $y = kx^2$ ($k \neq 0$)

1. Область определения - множество всех чисел D(f) = (-∞; +∞).
2. Графиком функции является парабола.
3. График функции проходит через начало координат.
4. При k > 0 функция убывает на промежутке (-∞; 0] и возрастает на промежутке [0; +∞). При k < 0 функция убывает на промежутке [0; +∞) и возрастает на промежутке (-∞; 0].
5. Функция ограничена снизу при k > 0 и сверху при k < 0.
6. Функция четная.
7. Область значений E(f) = [0; +∞) при k > 0 и E(f) = (-∞; 0] при k < 0.
8. Функция выпукла вниз k > 0 и вверх при k < 0.



$k > 0$



$k < 0$

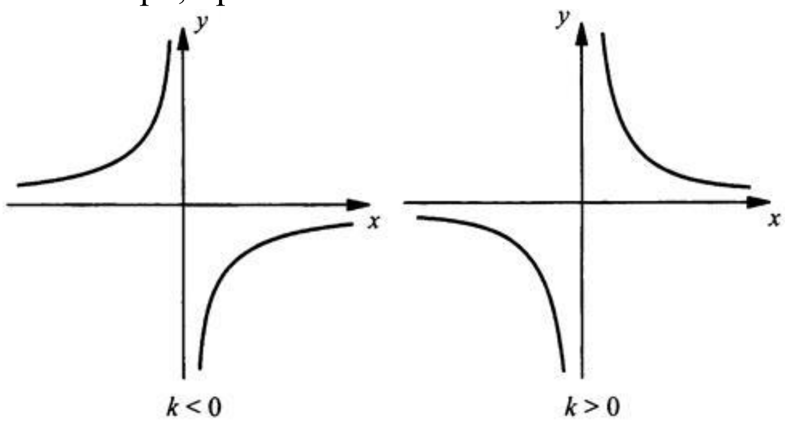
Пример 2

Докажем ограниченность квадратичной функции $y = x^2$.

Очевидно, что при всех значениях x величина $y = x^2$ принимает только неотрицательные значения, т. е. $y \geq 0$. По определению функция ограничена снизу, т. е. $y > m$ (где т может быть любым отрицательным числом: $m = -103$, $m = -5$, $m = -0,1$).

3. Обратная пропорциональность $y = k/x$.

1. Область определения - множество всех чисел, кроме нуля.
2. Графиком функции является гипербола.
3. График функций осей координат не пересекает.
4. Функция возрастает при $k < 0$ и убывает при $k > 0$ в области определения.
5. Функция неограниченна.
6. Функция нечетна.
7. Область значений - множество всех чисел, кроме нуля.
8. При $k > 0$ функция выпукла вверх при $x < 0$ и вниз, при $x > 0$. При $k < 0$ функция выпукла вниз при $x < 0$ и вверх, при $x > 0$.



Пример 3

Выясним монотонность обратной пропорциональности $y = k/x$.

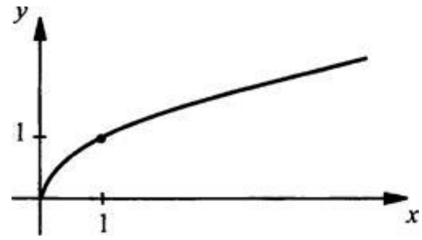
Область определения данной функции $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 (где $x_2 > x_1$) из области определения функции. Найдем значения функции в этих точках $f(x_1) = \frac{k}{x_1}$ и $f(x_2) = \frac{k}{x_2}$ и сравним их. Для этого рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$. Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_1 - x_2$ отрицательна. Поэтому знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ противоположен знаку дроби $\frac{k}{x_1 x_2}$.

Функция $y = k/x$ не определена в точке $x = 0$. Рассмотрим два промежутка области определения. При $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ и при $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ произведение $x_1 x_2$ положительно. Поэтому знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ противоположен знаку коэффициента k. Следовательно, при $k < 0$ величина $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ и функция возрастает; при $k > 0$ величина $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$ и функция убывает.

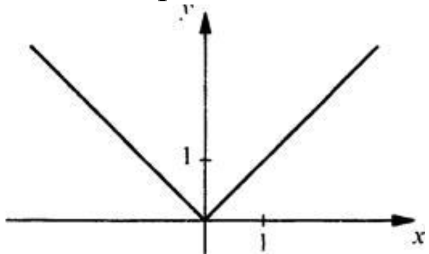
4. Функция $y = y\sqrt{x}$

1. Область определения - множество неотрицательных чисел $D(f) = [0; +\infty)$.
2. График специального названия не имеет.
3. График выходит из начала координат.
4. Функция возрастает.
5. Функция ограничена снизу, т. е. $y \geq 0$.
6. Функция определенной четности не имеет.
7. Область значений - множество неотрицательных чисел.
8. Функция выпукла вверх.



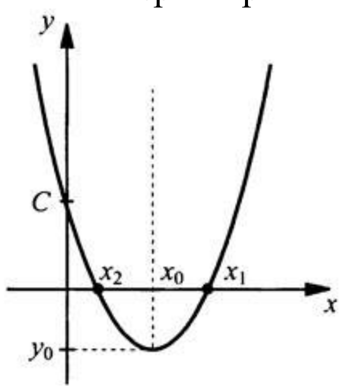
5. Функция y = |x|

1. Область определения - множество всех чисел D(f) = (-∞; +∞).
2. График специального названия не имеет.
3. График проходит через начало координат.
4. Функция убывает на промежутке (-∞; 0] и возрастает на промежутке [0; +∞).
5. Функция ограничена снизу, т. е. $y \geq 0$.
6. Функция четная.
7. Область значений - множество неотрицательных чисел.



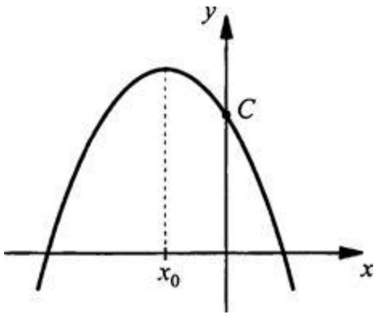
6. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$

1. Область определения - множество всех чисел D(f) = (-∞; +∞).
2. Графиком функции является парабола с вершиной в точке (x_0, y_0), где $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = y(x_0).$ При a > 0 ветви параболы направлены вверх, при a < 0 - вниз. Прямая $x = x_0$ - ось симметрии параболы.
3. График функции пересекает ось ординат в точке y = C. При $D = b^2 - 4ac > 0$ график пересекает ось абсцисс в точках $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, при D = 0 - график касается оси абсцисс в точке $x = -\frac{b}{2a}.$
4. При a > 0 функция убывает на луче $(-\infty; x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$. При a < 0 функция убывает на луче $[x_0; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$.
5. Функция ограничена снизу при a > 0 (т. е. $y \geq y_0$) и сверху при a < 0 (т. е. $y \leq y_0$).
6. Функция определенной четности не имеет.
7. Область значений $E(f) = [y_0; +\infty)$ при a > 0 и $E(f) = (-\infty; y_0]$ при a < 0.
8. Функция выпукла вниз при a > 0 и вверх - при a < 0.



Пример 4

На рисунке приведен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определим знаки коэффициентов a, b и c.



1) Так как ветви параболы направлены вниз, то коэффициент $a < 0$.

2) Абсцисса x_0 вершины параболы отрицательна (как видно из рисунка). Получаем неравенство: $-\frac{b}{2a} < 0.$ Умножим обе его части на отрицательное число $2a$. При этом знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $-b > 0$. Вновь умножим обе части этого неравенства на отрицательное число -1. Опять знак неравенства меняется на противоположный. Имеем: $b < 0$. Значит, коэффициент $b < 0$.

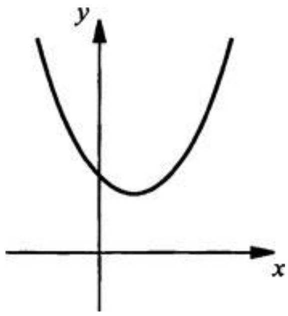
3) При $x = 0$ значение функции $y(x)$ равно $y(0) = c$. Из рисунка видно, что $c > 0$.

Итак, были определены знаки коэффициентов: $a < 0$, $b < 0$ и $c > 0$.

Пример 5

На рисунке приведен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определим знак выражения:

а) $a + b + c$; б) $4a – 2b + c$.



Видно, что при всех значениях x функция $y(x)$ принимает *только положительные значения*. Осталось понять смысл данных выражений. Найдем значение функции $y = ax^2 + bx + c$:

а) при $x = 1$ $y(1) = a + b + c$;

б) при $x = -2$ $y(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 4a - 2b + c$.

Напомним, что при всех значениях x (в том числе и при $x = 1$, и при $x = -2$) значения функции положительны. Поэтому $a + b + c > 0$ и $4a – 2b + c > 0$.

Пример 6

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точку A(-1; 10) и имеет вершину в точке B(1; -2). Напишем уравнение параболы.

Запишем условия прохождения параболы через точки A и B. Кроме того, учтем, что точка B - вершина параболы. Запишем выражение для абсциссы вершины. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 10, \\ a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = -2, \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - b + c = 10, \\ a + b + c = -2, \\ b = -2a. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и получим $-2b = 12$, откуда $b = -6$. Тогда из третьего уравнения имеем $-6 = -2a$, откуда $a = 3$. Подставим значения $a = 3$ и $b = -6$ в первое уравнение и получим: $3 + 6 + c = 10$, откуда $c = 1$.

Таким образом, напишем уравнение данной параболы $y = 3x^2 - 6x + 1$.

Пример 7

Найдем значение параметра к, при котором прямая $y = 2x - 5$ касается параболы $y = x^2 + kx + 4$. Найдем координаты точки касания.

Если графики двух функций пересекаются в точке с координатами $(x_0; y_0)$, то величины x_0 и y_0 являются решением системы уравнений $\begin{cases} y = x^2 + kx + 4, \\ y = 2x - 5. \end{cases}$ Если $(x_0; y_0)$ - точка касания двух графиков, то приведенная система имеет единственное решение $(x_0; y_0)$.

Приравняем правые части уравнений системы: $x^2 + kx + 4 = 2x - 5$ и получим квадратное уравнение с параметром $x^2 + (k - 2)x + 9 = 0$. Это уравнение (а следовательно, и приведенная система) имеет единственное решение, если дискриминант $D = (k - 2)^2 – 4 \cdot 9 = k^2 – 4k - 32 = 0$. Корни этого уравнения $k_1 = -4$ и $k_2 = 8$.

а) При $k = -4$ уравнение $x^2 + (k - 2)x + 9 = 0$ имеет вид $x^2 - 6x + 9 = 0$ или $(x - 3)^2 = 0$. Корень этого уравнения $x = 3$, тогда $y = 2x - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$. Итак, при $k = -4$ данные парабола и прямая касаются в точке (3; 1).

б) При $k = 8$ уравнение $x^2 + (k - 2)x + 9 = 0$ имеет вид $x^2 + 6x + 9 = 0$ или $(x + 3)^2 = 0$. Корень этого уравнения $x = -3$, тогда $y = 2x - 5 = 2 \cdot (-3) - 5 = -11$. Итак, при $k = 8$ данные парабола и прямая касаются в точке (-3; -11).

IV. Контрольные вопросы

1. Свойства и график линейной функции $y = kx + m$.
2. Свойства и график обратной пропорциональности $y = k/x$.
3. Свойства и график квадратичной функции $y = kx^2$.
4. Свойства и график функции $y = \sqrt{x}$.
5. Свойства и график функции $y = |x|$.
6. Свойства и график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

V. Задание на уроках

§ 10, № 14; 16; 24 (а, г); 26; § 11, № 31 (а, б); 32 (в, г); 33 (а, б); 34 (в, г).

VI. Задание на дом

§ 10, № 15; 17; 24 (б, в); 27; § 11, № 31 (в, г); 32 (а, б); 33 (в, г); 34 (а, б).

VII. Творческие задания

1. Постройте график функции:

а) $y = x + |x - 2|$; б) $= 2x - |x - 3|$;

в) $y = |x - 1| + |x + 2|$; г) $y = |x - 1| - |x + 2|$;

д) $y = \dfrac{x^2 - 9}{3 - x} + 2x + 1$; е) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$;

ж) $\dfrac{y + x - 1}{x + 2} = 1$; з) $\dfrac{2y - x - 2}{y + x} = 1$.

2. Постройте множество точек (x; y), координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|y| = x - 3$; б) $y + \dfrac{1}{y} = x + \dfrac{1}{x}$;

в) $(y - x)\left(y - \dfrac{1}{x}\right) = 0$; г) $|y - 3| = 1$;

д) $|y - 2x| = 4$; е) $|x| + |y| = 2$;

ж) $y \geq x + 1$; з) $y < 2x - 4$;

и) $|y - 1| \leq 2$; к) $|y| < 2x + 2$;

л) $|x| + 2|y| \geq 2$.

3. Напишите уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, которая проходит через точку А и имеет вершину в точке В:

а) $A(0; 1)$ и $B(1; -2)$;
б) $A(0; -5)$ и $B(3; 4)$;
в) $A(1; 2)$ и $B(-1; -10)$;
г) $A(-1; 9)$ и $B(-2; 11)$.

Ответы: а) $y = 2x^2 - 4x + 1$; б) $y = -x^2 + 6x - 5$; в) $y = 3x^2 + 6x - 7$; г) $y = -2x^2 - 8x + 3$.

4. Найдите значение параметра k, при котором прямая y_1 касается параболы y_2. Найдите координаты точки касания.

а) $y_1 = x - 3$ и $y_2 = x^2 + kx + 1$;
б) $y_1 = x + 5$ и $y_2 = -x^2 + (k - 2)x + 4$;
в) $y_1 = -2kx + 1$ и $y_2 = 2x^2 - 10x + 19$;
г) $y_1 = (1 - k)x - 2$ и $y_2 = 3x^2 + (2k + 1)x + 1$.

Ответы: а) при k = - 3 (2; -1), при k = 5 (-2; -5); б) при k = 1 (-1; 4), при k = 5 (1; 6); в) при k = -1 (3; 7), при k = 11 (-3; 67); г) при k = -2 (1; 1), при k = 2 (-1; -1).

5. Напишите уравнение параболы $y = x^2 + px + q$, если вершина ее находится в точке А:

а) A(1; -4); б) A(-1 - 5); в) A(2; -3); г) A(-4; -1).

Ответы: а) $y = x^2 - 2x - 3$; б) $y = x^2 + 2x + 6$; в) $y = x^2 - 4x + 1$; г) $y = -x^2 - 8x - 17$.

VIII. Подведение итогов уроков