Числовые последовательности (2 ч)

Цель: привести основные понятия, связанные с последовательностями.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

1. Определение числовой последовательности

Множество чисел, для каждого из которых известен его порядковый номер, называют *последовательностью*.

Пример 1

а) В последовательности положительных нечетных чисел 1, 3, 5, 7, ... известно, что первое число равно 1, второе число равно 3, третье число равно 5 и т. д.

б) В последовательности правильных дробей с числителем 1 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ известно, что первое число равно 1/2, второе число равно 1/3, третье число равно 1/4 и т. д.

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности*. Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена: y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ... Соответственно, член последовательности с номером n (или n-й член последовательности) обозначают y_n, а саму последовательность - (y_n).

Пример 2

Рассмотрим последовательность натуральных трехзначных чисел: 100; 101; 102; ...; 999. В ней $y_1 = 100$, $y_2 = 101$, $y_3 = 102$, ..., $y_{900} = 999$. Член этой последовательности с номером n (n-й член последовательности) можно вычислить по формуле $y_n = 99 + n$, где n = 1, 2, 3, ..., 900.

Последовательность может содержать *бесконечно много членов* (пример 1). Такую последовательность называют *бесконечной*. Последовательность может содержать и *конечное число членов*(пример 2). Такую последовательность называют *конечной*.

2. Способы задания последовательностей

Последовательность необходимо задать, т. е. указать способ, с помощью которого можно найти каждый ее член. Рассмотрим основные способы задания последовательностей.

1. Аналитический способ (формула n-го члена)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти по номеру n ее член y_n.

Пример 3

а) Пусть последовательность задана формулой $y_n = 3n - 2$. Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $y_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1, y_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4, y_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ и т. д. Имеем последовательность 1, 4, 7,....

б) Пусть последовательность задана формулой $y_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$. Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $y_1 = \frac{1+(-1)^1}{2} = 0, \quad y_2 = \frac{1+(-1)^2}{2} = 1, \quad y_3 = \frac{1+(-1)^3}{2} = 0, \quad y_4 = \frac{1+(-1)^4}{2} = 1$ и т. д. Имеем последовательность 0, 1, 0, 1, ...

2. Аналитический способ (рекуррентная формула)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти следующие члены последовательности, если известны один или несколько предыдущих членов.

Пример 4

а) Пусть последовательность задана формулой $y_{n+1} = 2y_n + 3$, где $y_1 = 5$ и $n \geq 1$.

Запишем рекуррентную формулу для n = 1: $y_{1+1} = 2y_1 + 3$ или $y_2 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$.

Пишем формулу для n = 2: $y_{2+1} = 2y_2 + 3$ или $y_3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$.

Запишем формулу для n = 3: $y_{3+1} = 2y_3 + 3$ или $y_4 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность 5, 13, 29, 61, ...

б) Пусть последовательность задана формулой $y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n$, где $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ и $n \geq 1$.

Запишем рекуррентную формулу для n = 1: $y_{1+2} = 2y_{1+1} + 3y_{1+1}$ или $y_3 = 2y_2 + 3y_1$ или $y_3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$.

Пишем формулу для n = 2: $y_{2+2} = 2y_{2+1} + 3y_2$ или $y_4 = 2y_3 + 3y_2 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$.

Запишем формулу для n = 3: $y_{3+2} = 2y_{3+1} + 3y_3$ или $y_5 = 2y_4 + 3y_3$ или $y_5 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность 1, 2, 7, 20, 61, ...

3. Описательный способ

Описывается способ получения членов последовательности.

Пример 5

а) Рассмотрим последовательность натуральных четных чисел. Из описания последовательности легко выписать ее члены: 2, 4, 6, 8, ...

б) Рассмотрим последовательность приближений по недостатку с точностью до n цифр иррационального числа π. Из описания последовательности выписываем ее члены: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3, 1415;...

3. Основные свойства последовательностей

Теперь рассмотрим два основных свойства последовательностей.

1. Ограниченность последовательности

Последовательность (y_n) называют *ограниченной*, если существуют два таких числа m и M, что для любого натурального номера n выполнено неравенство $m \le y_n \le M$.

Пример 6

Докажем ограниченность последовательности $y_n = \frac{n-1}{n+2}$.

Найдем первый член последовательности $y_1 = \frac{1-1}{1+2} = 0$ и член последовательности с очень большим номером n, например $y_{100} = \frac{100-1}{100+2} = \frac{99}{102} \approx 1$. Возникает гипотеза, что последовательность ограничена и m = 0 и M = 1. Поэтому надо доказать, что при всех натуральных значениях n выполнено неравенство $0 \le \frac{n-1}{n+2} \le 1$. Очевидно, что левая часть неравенства $0 \le \frac{n-1}{n+2}$ выполняется. Рассмотрим правую часть неравенства $\frac{n-1}{n+2} \le 1$. Так как выражение n + 2 положительно, то получаем неравенство $n - 1 \le n + 2$ или $-1 \le 2$, которое является верным.

2. Монотонность последовательности

Последовательность (y_n) называют *возрастающей*, если каждый ее член (начиная со второго) больше предыдущего, т. е. $y_{n+1} > y_n$ для $n \ge 1$.

Последовательность (y_n) называют *убывающей*, если каждый ее член (начиная со второго) меньше предыдущего, т. е. $y_{n+1} < y_n$ для $n \ge 1$.

Пример 7

Определим монотонность последовательности $y_n = \frac{n-1}{n+2}$.

Запишем (n + 1)-й член последовательности $y_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+2} = \frac{n}{n+3}$. Найдем разность двух соседних членов $y_{n+1} - y_n = \frac{n}{n+3} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{n(n+2)-(n+3)(n-1)}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{(n+3)(n+2)}$. Так как n - натуральное число, то при всех n дробь $\frac{3}{(n+3)(n+2)}$ положительна. Поэтому $y_{n+1} - y_n > 0$ или $y_{n+1} > y_n$ при всех n. Тогда по определению данная последовательность (y_n) возрастающая.

Как видно из этого урока, понятия последовательности и функции, их способы задания и свойства очень похожи. Поэтому последовательность (y_n) можно рассматривать как функцию y_nнатурального аргумента и, т. е. $y_n = f(n)$. Тогда автоматически возникают понятия ограниченности и монотонности последовательности.

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение последовательности.
2. Основные способы задания последовательности.
3. Ограниченность последовательности.
4. Монотонность последовательности.

IV. Задание на уроках

§ 15, № 1; 6; 8; 10 (а); 12 (г); 16 (а); 18 (а, б); 19 (в, г); 20 (а, б); 23 (в, г); 35 (а, б); 37 (в, г); 39 (а, б); 41 (г).

V. Задание на дом

§ 15, № 2; 7; 9; 10 (б); 13 (б); 16 (г); 18 (г); 19 (а, б); 20 (в, г); 23 (а, б); 35 (в, г); 37 (а, б); 39 (в, г); 41 (б).

VI. Творческие задания

1. Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), если:

а) $a_{n+1} = 3a_n - 1$, $a_1 = 1$;
б) $a_{n+1} = 4a_n + 3$, $a_1 = 2$;
в) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
г) $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$;
д) $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;
е) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

Ответы: а) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 14$; б) $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = 47$, $a_4 = 191$; в) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$; г) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = -3$, $a_4 = -5$; д) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$; е) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$.

2. Докажите ограниченность последовательности (a_n):

а) $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$; б) $a_n = \frac{1-3n}{n+2}$;

в) $a_n = \frac{n+5}{n}$; г) $a_n = \frac{3-2n}{n+1}$.

3. Определите монотонность последовательности (a_n):

а) $a_n = \frac{3n+2}{n+1}$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n$;

в) $a_n = \frac{5-2n}{n+2}$; г) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

д) $a_n = \frac{3n-4}{n+3}$; е) $a_n = \frac{3-n}{n+1}$;

ж) $a_n = n^2 + 4n + 10$; з) $a_n = n^2 - 8n + 20$.

Ответы: а, д, ж) возрастающая; в, е) убывающая; б, г, з) немонотонная.

VII. Подведение итогов уроков