Экспериментальные данные и вероятности событий

Цель: обсудить связь между вероятностями событий и экспериментальными статистическими данными.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Достоверное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что на игральной кости выпадет четное число очков.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 8.

Вариант 2

1. Невозможное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что на игральной кости выпадет нечетное число очков.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 9.

III. Изучение нового материала

Обсудим связь между вероятностями случайных событий и экспериментальными статистическими данными. При этом экспериментальные данные - *результат* конкретного *измерения* (реальный факт), *вероятность* такого события - *модель* реальности. Рассмотрим вопрос о соотношении реальности и ее модели.

Пример 1

Разумно предположить, что вероятность выпадения орла при бросании монеты равна 0,5. Однако при небольшом числе бросаний это может и не проявиться. Например, при пяти бросаниях орел может выпасть все пять раз (а может и ни разу). Вместе с тем при очень большом числе бросаний орел выпадает примерно в половине случаев. Так в XVIII в. при бросании монеты 4040 раз орел выпал 2048 раз (вероятность 0,5069); в конце XX в. при бросании 10 000 раз - 4979 раз (вероятность 0,4979).

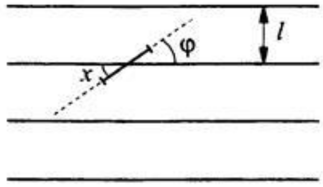
Таким образом, при неограниченном увеличении числа независимых повторений одного и того же опыта в одинаковых условиях частота появления определенного результата случайного события приближается к некоторому постоянному числу. Это явление называют *статистической устойчивостью*, а указанное число - *статистической вероятностью события*.

Результат каждого бросания монеты является случайным событием и непредсказуем. Однако явление статистической устойчивости гарантирует, что с увеличением числа повторений опыта частота события стремится к его вероятности.

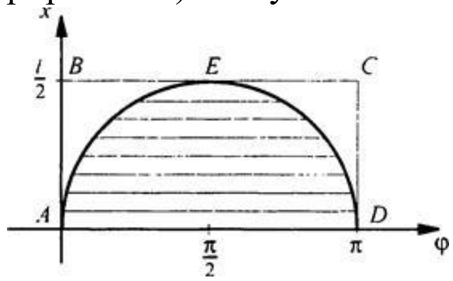
Отметим, что статистическая вероятность позволяет определять фундаментальные *математические постоянные*, например, число π.

Пример 2

Рассмотрим известную задачу Ж. Бюффона (1707-1788). Пусть расстояние между параллельными прямыми и длина иглы равны l. Найдем вероятность того, что случайным образом брошенная игла пересечет какую-нибудь прямую.



Будем характеризовать положение иглы расстоянием x от середины иглы до ближайшей прямой и углом φ между иглой и прямой. Очевидно, что $0 \le x \le \frac{l}{2}$ и $0 \le \varphi \le \pi.$ Если игла пересекает прямую, то выполняется неравенство $0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi.$ Построим прямоугольник ABCD, который задается неравенствами $0 \le x \le \frac{l}{2}$ и $0 \le \varphi \le \pi,$ а также фигуру AED, определяемую неравенством $0 \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi.$ Используя понятие геометрической вероятности, получим, что вероятность пересечения иглой одной из прямых равна $P = \frac{S_{AED}}{S_{ABCD}}.$ Найдем эти площади: $S_{ABCD} = \frac{\pi l}{2}.$ $S_{AED} = l$ (эту величину можно найти только с помощью интегрирования). Получаем: P = 2/π, откуда π = 2/P.



Заметим, что такие эксперименты проводились. Так в 1850 г. при 5000 бросаний было получено π = 3,1596, в 1985 г. при 1120 бросаниях - π = 3,1419, в 1901 г. при 3408 бросаниях - π = 3,1416. Напомним, что точное значение π = 3,1415... . Таким образом, число я было найдено с очень высокой точностью.

Понятие статистической вероятности позволяет решать многие практические задачи.

Пример 3

Как приближенно посчитать число рыб в озере?

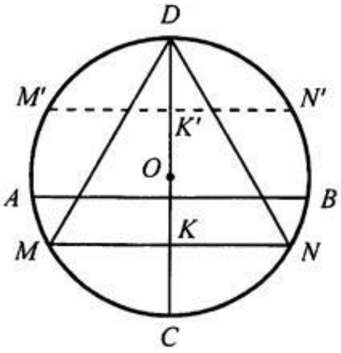
Пусть в озере плавает x рыб. Бросаем сеть и отлавливаем n рыб. Вероятность поймать одну рыбу $P = \frac{n}{x}.$ Пометим этих рыб и выпустим в озеро. Через несколько дней в ту же погоду, в том же месте ставим ту же сеть. Предположим, что поймали m рыб, из них k меченых. Меченую рыбу поймали с вероятностью $P = \frac{k}{m}.$ Получаем равенство: $\frac{n}{x} = \frac{k}{m},$ откуда $x = \frac{nm}{k}.$ Разумеется, точность такого эксперимента будет невысокой, но для оценки числа рыб в озере вполне допустима.

Заметим, что при решении задач по теории вероятностей важнейшее значение имеет понятие «*случайным образом*».

Пример 4

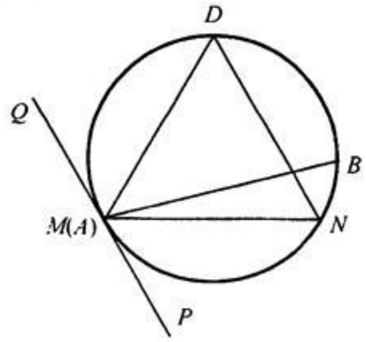
Обсудим парадокс Ж. Бертрана (1822-1900). Рассмотрим окружность и вписанный в нее правильный треугольник. Возьмем произвольную хорду окружности и найдем вероятность того, что эта хорда больше стороны треугольника. Парадокс состоит в том, что при разных способах решения будут получены разные ответы.

Первый способ. Пусть проведена хорда AB. Построим диаметр CD, перпендикулярный этой хорде. Также параллельно хорде AB построим сторону MN правильного вписанного треугольника MNDи прямую M'N', симметричную стороне MN относительно центра O окружности. Хорды AB, которые пройдут через точки отрезка KK' диаметра CD, будут длиннее MN.



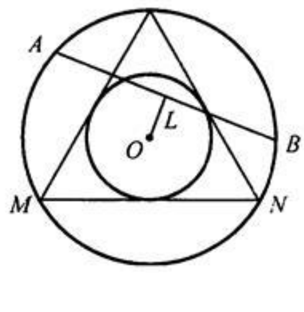
Легко показать, что $CK = \frac{1}{4}CD$ и $KK' = \frac{1}{2}CD.$ Разумно считать, что вероятность рассматриваемого события $P = \frac{KK'}{CD} = \frac{1}{2}$ (первый ответ).

Второй способ. Совместим один конец A хорды A B с вершиной M правильного треугольника MND. Хорды AB, которые попадают во внутреннюю часть угла DMN = 60°, будут больше стороны MNтреугольника.



Разумно считать, что все хорды, которые можно провести через точку M, равномерно распределены по углу QMP = 180°. Тогда вероятность рассматриваемого события $P = \frac{\angle DMN}{\angle QMP} = \frac{60°}{180°} = \frac{1}{3}$ (второй ответ).

Третий способ. Положение хорды AB можно характеризовать положением ее середины L. Если точка L будет расположена внутри окружности, вписанной в треугольник MND, то хорда AB будет больше стороны MV. Радиусы вписанной r и описанной R окружностей различаются в два раза, т. е. R = 2r. Тогда вероятность рассматриваемого события равна отношению площадей таких окружностей, т. е. $P = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$ (третий ответ).



Таким образом, в зависимости от способа решения получили три разных ответа: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Разные результаты получили потому, что по-разному трактовалось понятие проведения хорды случайным образом. Фактически каждый раз решалась новая задача. Нам только казалось, что это одна и та же задача.

IV. Контрольные вопросы

1. Связь реальности и ее модели.
2. Статистическая устойчивость и статистическая вероятность события.
3. Применения статистической вероятности события.

V. Задание на уроках

§ 21, № 1, 3, 5,7, 9.

VI. Задание на дом

§ 21, № 2, 4, 6, 8, 10.

VII. Подведение итогов уроков