Функции $y = x^{-n}$ ($n \in N$), их свойства и графики (3ч)

Цель: рассмотреть свойства и график функции $y = x^{-n}$ ($n \in N$).

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = 2(x - 1)^4$. Вычислите $2f(0) – 3f(1) + 4f(2)$.
2. Сравните числа: а) $(-7,2)^6$ и $(6,1)^6$; б) $(-4,8)^3$ и $2,7^3$.
3. Постройте график функции $y = (x + 1)^4 - 2$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = -2(x + 1)^4$. Вычислите $6f(-1) + 4f(0) – 3f(1)$.
2. Сравните числа: а) $(-9,3)^4$ и $(7,3)^4$; б) $(-7,8)^5$ и $4,7^5$.
3. Постройте график функции $y = (x + 1)^3 - 2$.

III. Изучение нового материала

Рассмотрим теперь функции $y = x^{-n}$ ($n \in N$). Такие функции называют *степенными функциями с отрицательным целыми показателями*. По определению степени с отрицательным показателем рассматриваемые функции можно записывать и в виде $y = 1/x^n$. При $n = 1$ функция $y = 1/x$ была изучена. Ее графиком является гипербола. Также необходимо обсудить свойства и график степенной функции при любом натуральном n. Эти характеристики существенно *различаются в зависимости от четности или нечетности числа n*.

Приведем *свойства* функции $y = x^{-n}$ *при четном n*.

1) Область определения функции - все значения x, кроме нуля, т.е. $D(f) = (-\infty; 0)U(0; +\infty)$.

2) График не пересекает осей координат. При этом ось абсцисс является *горизонтальной асимптотой* графика функции, ось ординат - *вертикальной асимптотой* графика (напомним, что асимптотой графика функции называют прямую, к которой при определенных условиях неограниченно близко приближается график).

3) При всех x из области определения $y > 0$. Поэтому график расположен в первой и второй координатных четвертях.

4) Функция четная: $y(-x) = y(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно оси ординат.

5) Функция возрастает в промежутке $(-\infty; 0)$ и убывает в промежутке $(0; +\infty)$. Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.

6) Функция ограничена снизу: $y > 0$.

7) Область значений функции $E(f) = (0; +\infty)$.

8) График функции представлен на рис. а.

Рассмотрим также *свойства* функции $y = x^{-n}$ *при нечетном n* (они аналогичны свойствам функции $y = 1/x$).

1) Область определения функции - все значения x, кроме нуля, т.е. $D(f) = (-\infty; 0)U(0; +\infty)$).

2) График не пересекает осей координат. При этом ось абсцисс является *горизонтальной асимптотой* графика функции, ось ординат - *вертикальной асимптотой*.

3) При $x > 0$ значения $y > 0$, при $x < 0$ - $y < 0$. Поэтому график расположен в первой и третьей координатных четвертях.

4) Функция нечетная: $y(-x) = -y(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

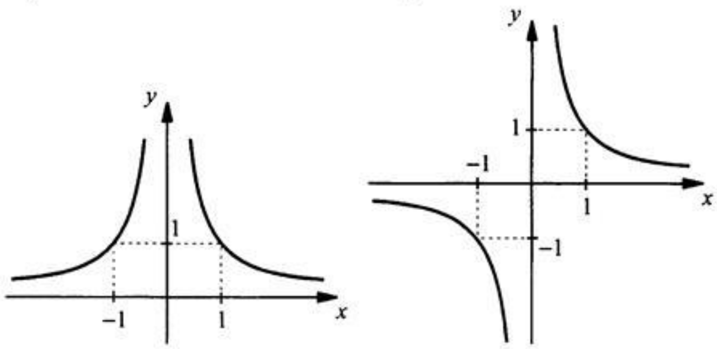
5) Функция убывает в области определения. Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.

6) Функция не ограничена.

7) Область значений функции $E(f) \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

8) График функции представлен на рис. б.

а) *б)*



n – четное *n* – нечетное

Пример 1

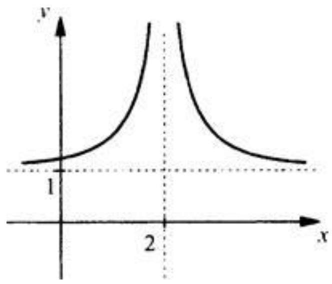
Сравним числа $0{,}17^{-3}$ и $0{,}19^{-3}$.

Сравниваются два значения степенной функции $y = x^{-3}$ при $x = 0{,}17$ и $x = 0{,}19$. При $n = 3$ функция убывающая. Поэтому $0{,}17^{-3} > 0{,}19^{-3}$.

Пример 2

Построим график функции $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1.$

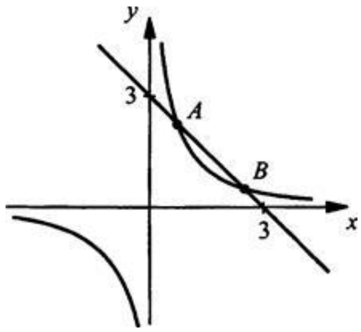
Такой график получается параллельным переносом графика $y = 1/x^2$ на две единицы вправо и на одну единицу вверх. Поэтому график имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и горизонтальную асимптоту $y = 1$. При этом график симметричен относительно прямой $x = 2$.



Пример 3

Определим число решений системы уравнений $\begin{cases} y = \frac{1}{x^3}, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Построим графики функций $y = 1/x^3$ и $y = 3 - x$. Видно, что графики функций пересекаются в двух точках: A и B. Поэтому данная система уравнений имеет два решения.



Пример 4

Даны функции $f(x) = x^{-3}$ и $g(x) = x^4$. Докажем, что выполняется равенство $(f(x^2))^2=(g(x))^{-3}$.

Сначала найдем $f(x^2) = (x^2)^{-3} = x^{-6}$ и $(f(x^2))^2 = (x^{-6})^2 = x^{-12}$. Также найдем $(g(x))^{-3}= (x^4)^{-3} = x^{-12}$. Видно, что данное равенство действительно выполняется.

IV. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y = x^{-n}$ для четных n.

2. Приведите свойства и график степенной функции $y = x^{-n}$ для нечетных n.

V. Задание на уроках

§ 13, № 2 (а, б); 4 (а, в); 5; 7; 11 (б); 12; 19; 21 (а); 22 (а, б); 24.

VI. Задание на дом

§ 13, № 2 (в, г); 4 (б, г); 6; 8; 11 (г); 13; 20; 21 (б); 22 (в, г); 25.

VII. Подведение итогов уроков