Функция $y = x^n$ ($n \in N$), ее свойства и графики (4ч)

Цель: рассмотреть свойства и график функции $y = x^n$ ($n \in N$).

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2x - 3$;

б) $y = |x^2 + 2x - 3|$;

в) $y = -2x^2 + \frac{|x|}{x}$.

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки A(-1; 0), 5(0; 3) и C(2; -3). Найдите коэффициенты a, b, c.

Вариант 2

1. Постройте график функции:

а) $y = -x^2 - x + 2$;

б) $y = |-x^2 - x + 2|$;

в) $y = 2x^2 - \frac{|x|}{x}$.

2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки A(-1; 4), B(0; 1) и C(2; 7). Найдите коэффициенты a, b, c.

III. Изучение нового материала

Функцию $y = x^n$ (где x - независимая переменная, n - натуральное число) называют степенной функцией с натуральным показателем. Частные случаи такой функции для n = 1, 2 (т. е. $y = x$, $y = x^2$) мы уже рассматривали. Известны свойства и графики этих функций. Теперь необходимо обсудить свойства и график степенной функции при любом натуральном n. Эти характеристики существенно различаются в зависимости от четности или нечетности числа n.

Приведем *свойства* функции $y = x^n$ *при четном n* (они аналогичны свойствам функции $y = x^2$).

1) Область определения функции - промежуток $(-\infty; +\infty)$.

2) Если $x = 0$, то $y = 0$. Поэтому график функции проходит через начало координат.

3) Если $x \neq 0$, то $y > 0$. Следовательно, график функции расположен в первой и второй координатных четвертях.

4) Функция четная: $y(-x) = y(x)$. Поэтому график функции симметричен относительно оси ординат.

5) Функция возрастает в промежутке $[0; +\infty)$ и убывает в промежутке $(-\infty; 0]$. Наименьшее значение $y = 0$ функция принимает при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет.

6) Функция ограничена снизу: $y \geq 0$.

7) Область значений функции - промежуток $[0; +\infty)$.

8) График функции представлен на рис. а.

Рассмотрим также *свойства* функции $y = x^n$ *при нечетном n* (они аналогичны свойствам функции $y = x^3$).

1) Область определения функции - промежуток $(-\infty; +\infty)$.

2) Если $x = 0$, то $y = 0$. Поэтому график функции проходит через начало координат.

3) Если $x < 0$, то $y < 0$, и если $x > 0$, то $y > 0$. Следовательно, график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.

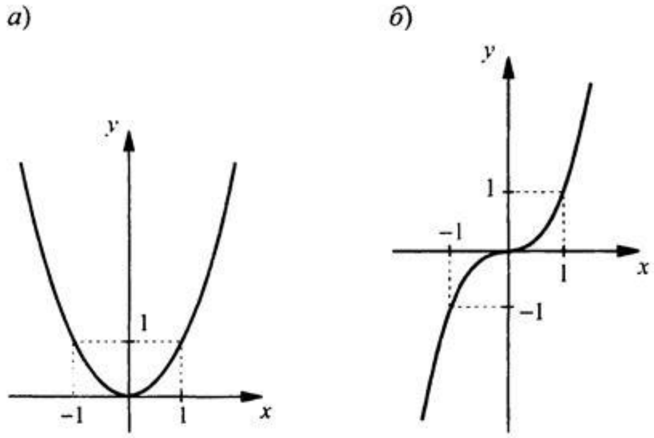
4) Функция нечетная: $y(-x) = -y(x)$. Поэтому график функции симметричен относительно начала координат.

5) Функция возрастает на всей области определения.

6) Функция не ограничена.

7) Область значений функции - промежуток $(-\infty; +\infty)$.

8) График функции представлен на рис. 6.



n – четное *n* – нечетное

Пример 1

Дана функция $f(x) = x^3$. Вычислим выражение $f(3) – 4f(2) + 7f(1)$.

Чтобы найти значение функции при данном значении аргумента, надо подставить этот аргумент в формулу, задающую функцию, и выполнить действия. Получаем: $f(3) – 4f(2) + 7f(1) = 3 - 4 \cdot 2^3 + 7 - 1^3 = 27 – 4 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 27 - 32 + 7 = 2$.

Пример 2

Сравним числа: а) $(-3{,}2)^4$ и $(-1{,}8)^4$; б) $2{,}4^4$ и $2{,}7^4$; в) $(-6{,}5)^3$ и $(-4{,}8)^3$; г) $(-6{,}5)^3$ и $(-4{,}8)^5$; д) $2{,}8^3$ и $4{,}1^3$.

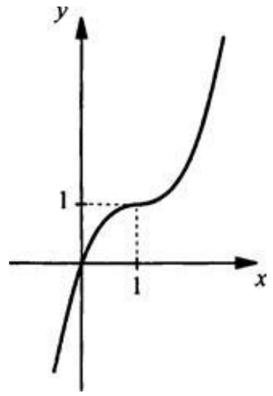
При решении подобных задач учитывают монотонность соответствующей функции, $f(x) = x^4$. Эта функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. Так как $-3{,}2 < -1{,}8$, то $f(-3{,}2) > f(-1{,}8)$ или $(-3{,}2)^4 > (-1{,}8)^4$. На промежутке $[0; +\infty)$ эта функция возрастает. Так как $2{,}4 < 2{,}7$, то и $f(2{,}4) < f(2{,}7)$ или $2{,}4^4 < 2{,}7^4$.

Теперь рассмотрим функцию $g(x) = x^3$. Такая функция возрастает на всей области определения. Так как $-6{,}5 < -4{,}8$ и $2{,}8 < 4{,}1$, то и $g(-6{,}5) < g(-4{,}8)$ и $g(2{,}8) < g(4{,}1)$ или $(-6{,}5)^3 < (-4{,}8)^3$ и $2{,}8^3 < 4^3$.

Пример 3

Построим график функции $y = (x - 1)^3 + 1$.

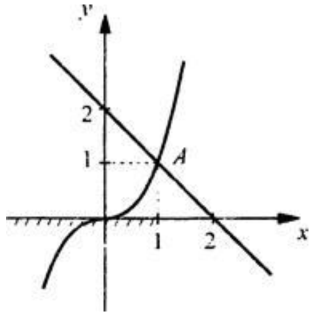
Учтем ранее изученные способы преобразования графиков. График функции $y = (x - 1)^3 + 1$ получается сдвигом графика функции $y = x^3$ на одну единицу вправо и на одну единицу вверх.



Пример 4

Решим неравенство $x^3 \le 2 - x$.

Решим данное неравенство графически. Построим графики функций $y = x^3$ и $y = 2 - x$. Эти графики пересекаются в единственной точке A(1; 1). По условию задачи надо найти те значения x, при которых первый график расположен не выше второго графика. Из рисунка видно, что условие задачи выполняется на промежутке $(-\infty; 1]$.



IV. Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y – x^n$ для четных n.

2. Приведите свойства и график степенной функции для нечетных п.

V. Задание на уроках

§ 12, № 1 (а, г); 2; 5 (б); 13 (а, в); 15 (а); 17 (а, б); 18 (в, г); 20 (а); 22; 24 (а, б); 25 (в, г); 27; 29; 32 (а); 33 (а, г); 34.

VI. Задание на дом

§ 12, № 1 (б, в); 3; 5 (в); 13 (б, г); 15 (г); 17 (в, г); 18 (а, б); 20 (г); 23; 24 (в, г); 25 (а, б); 28; 30; 32 (б); 33 (б); 35.

VII. Подведение итогов уроков