Функция $y = \sqrt[n]{x}$ (n ∈ N, n ≥ 2), ее свойства и график (3 ч)

Цель: рассмотреть свойства и график функции $y = \sqrt[n]{x}$.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y = x^{-n}$ для четных n.

2. Постройте график функции $y = \frac{1}{(x+2)^3} - 3.$

Вариант 2

1. Перечислите основные свойства и приведите график функции $y = x^{-n}$ для нечетных n.

2. Постройте график функции $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 3.$

III. Изучение нового материала

В учебнике рассматривается только функция $y = \sqrt[3]{x}.$ На наш взгляд, целесообразно расширить задачу: изучить функцию $y = \sqrt[n]{x}$ (n ∈ N, n ≥ 2) и привести ее график. При n = 3 тем самым будет рассмотрен материал учебника.

Вы уже знаете, что понятие квадратного корня возникло при решении простейшего квадратного уравнения $x^2 = a$. При этом квадратным корнем из числа a называют такое число, квадрат которого равен a. Разумеется, кроме уравнения $x^2 = a$, необходимо решать уравнения $x^3 = a$, $x^4 = a$,..., $x^n = a$. Поэтому надо ввести понятие корня любой натуральной степени n (аналогичное понятию квадратного корня).

Корнем n-й степени из числа a называют такое число, n-я степень которого равна a. Этот корень обозначают символом $\sqrt[n]{a}.$ Причем n называют показателем корня, a - подкоренным выражением.

Пример 1

а) $\sqrt[4]{81} = 3,$ так как $3^4 = 81$;

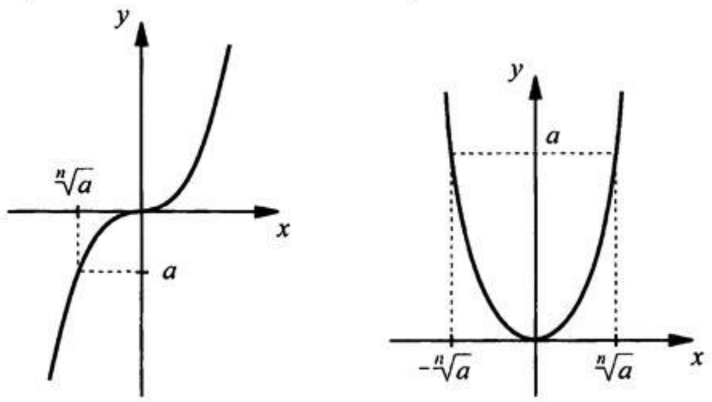
б) $\sqrt[3]{-8} = -2,$ так как $(-2)^3 = -8$;

в) $\sqrt[5]{0} = 0,$ так как $0^5 = 0$.

Принято корень второй степени называть квадратным корнем, корень третьей степени - кубическим корнем.

Теперь необходимо уточнить понятие корня. Сначала рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ с нечетным показателем n. Из рис. а видно, что для любого значения a уравнение $x^n = a$ имеет единственное решение $x = \sqrt[n]{a}.$ Обратимся теперь к степенной функции $y = x^n$ с четным показателем n (рис. б). Тогда уравнение $x^n = a$ при $a < 0$ решений не имеет, при $a = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, при $a > 0$ имеет два противоположных по знаку решения. В этом случае положительное решение обозначают символом $\sqrt[n]{a}.$

а) б)



n – нечетное n – четное

Пример 2

Рассмотрим уравнение $x^4 = 81$. Очевидно, что такое уравнение имеет два решения $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$, так как при подстановке этих чисел в уравнение получаем верное равенство. Учитывая, что $\sqrt[4]{81} = 3$, такие решения можно записать в виде $x_1 = -\sqrt[4]{81} = -3$ и $x_2 = \sqrt[4]{81} = 3$.

Таким образом, выражение $\sqrt[n]{a}$ при $a \geq 0$ имеет смысл при четном и нечетном n и значение этого выражения является *неотрицательным числом. Его называют арифметическим корнем n-й степени из a*. Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень из положительного числа.

Пример 3

Получаем $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64}$, так как $\sqrt[3]{-64} = -4$ и $-\sqrt[3]{64} = -4$.

Ранее изученные *свойства* квадратного корня можно обобщить на случай корня n-й степени:

1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$;
2) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;
3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
5) $\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|$.

В равенствах 1-5 числа m и n натуральные; в равенствах 1-4 числа $a, b \geq 0$, и в равенстве 4 число $b \neq 0$.

Пример 4

Используя приведенные свойства, вычислим:

а) $(\sqrt[7]{3})^7 = 3$;

б) $\sqrt[5]{3^{10}} = (\sqrt[5]{3})^{10} = (\sqrt[5]{3})^{5\cdot 2} = ((\sqrt[5]{3})^5)^2 = 3^2 = 9$;

в) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{2^2 \cdot 2^3} = \sqrt[5]{2^5} = 2$;

г) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{108}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{108}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{3}$;

д) $\sqrt[6]{(-7)^6} = |-7| = 7$;

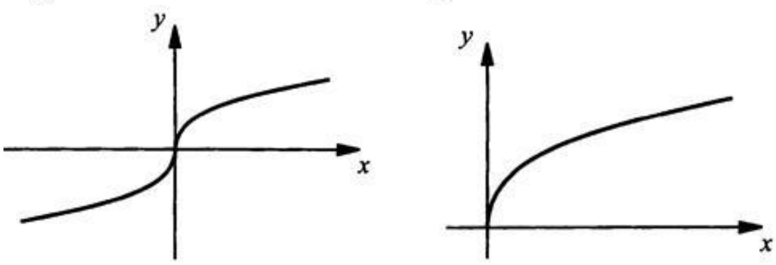
е) $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{4}{3}$;

ж) $\sqrt[3]{\sqrt{31}-2} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{31}} = \sqrt[3]{(\sqrt{31}-2)(2+\sqrt{31})} = \sqrt[3]{(\sqrt{31}-2)(\sqrt{31}+2)} =$

$= \sqrt[3]{(\sqrt{31})^2 - 2^2} = \sqrt[3]{31-4} = \sqrt[3]{27} = 3.$

В заключение приведем графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ для нечетных (а) и четных (б) значений n.

а) *б)*



n – четное *n* – нечетное

IV. Контрольные вопросы

1. Определение корня n-й степени.

2. Основные свойства корня n-й степени.

3. Графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ для нечетных и четных значений n.

V. Задание на уроках

§ 14, № 1 (а, б); 2; 4; 7 (в, г); 8 (а, в); 10 (б); 11 (а, в); 13 (б); 15 (а, б); 19(а); 26; 27 (а, б); 28 (а).

VI. Задание на дом

§ 14, № 1 (в, г); 3; 5; 7 (а, б); 8 (б, г); 10 (г); 11 (б, г); 13 (г); 15 (в, г); 19(б); 25; 27 (в, г); 28 (б).

VII. Подведение итогов уроков