Методы решения систем уравнений

Цель: рассмотреть способы решения нелинейных систем уравнений с двумя переменными.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=4, \\ y=x^2-2. \end{cases}$
2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством:

а) $|y-x-1|<2$;

б) $x^2+(y+1)^2 \geq 4$.

Вариант 2

1. Графически решите систему уравнений $\begin{cases} y=2x-2, \\ y=x^2+1. \end{cases}$
2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством:

а) $|y+x+2|>1$;

б) $(x-1)^2+y^2 \leq 4$.

III. Изучение нового материала

В 7 классе было рассмотрено решение систем линейных уравнений (т. е. уравнений первой степени) с двумя переменными. Теперь необходимо перейти к изучению систем нелинейных уравнений (т. е. уравнений степени два и выше). При их решении в основном используются три метода.

Основные методы решения систем уравнений

1. Метод подстановки

Этот метод уже применялся при решении систем линейных уравнений. Напомним *алгоритм* использования такого метода:

1) выразить из более простого уравнения одну переменную через другую;

2) подставить это выражение в другое уравнение и получить уравнение с одной неизвестной;

3) решить полученное уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующие значения второй неизвестной.

Пример 1

Решим систему уравнении $\begin{cases} 3y^2-2x^2+xy+5x+y=8, \\ 2x-y=3. \end{cases}$

Второе уравнение системы является линейным (первой степени) и, соответственно, более простым. Выразим из него переменную y через переменную x: y = 2x - 3. Подставим это выражение в первое уравнение и получим уравнение с переменной x: $3(2x-3)^2-2x^2+x(2x-3)+5x+(2x-3)=8$ или (после преобразований) $3x^2 - 8x + 4 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 2/3$. Используя формулу y = 2x - 3, найдем соответствующие значения переменной y: $y_1=2\cdot 2-3=1$ и $y_2=2\cdot\frac{2}{3}-3=-\frac{5}{3}$. Итак, система имеет два решения: (2; 1) и $\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Во многих случаях оба уравнения системы являются нелинейными. Иногда способ подстановки пригоден и для таких систем.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+5xy-2y^2=-2, \\ xy=3. \end{cases}$

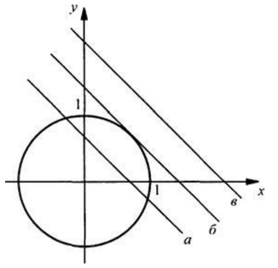
Очевидно, что x ≠ 0. Из второго уравнения выразим переменную y через x: y = 3/x и подставим в первое. Получаем уравнение: $x^2+5\cdot 3-2\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^2=-2$ (после преобразований) $x^4 + 17x^2 - 18 = 0$. Корни этого биквадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. По формуле $y = 3/x$ найдем соответствующие значения y: $y_1 = \frac{3}{1} = 3$ и $y_2 = \frac{3}{-1} = -3.$ Итак, система уравнений имеет два решения: (1; 3) и (-1; -3).

Способ подстановки полезен и при решении систем уравнений с параметрами.

Пример 3

При всех значениях параметра a определим число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a. \end{cases}$

Из второго уравнения выразим переменную y через x: $y = a - x$. Подставим это выражение в первое уравнение и получим: $x^2 + (a - x)^2 = 1$ или $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 4(2 - a^2)$. Число решений уравнения (а следовательно, и системы уравнений) определяется знаком дискриминанта.



Если $D > 0$ или $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, система имеет два решения (пересечение прямой и окружности - случай а. Если $D = 0$ или $a \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$, система имеет одно решение (касание прямой и окружности - случай б. Если $D < 0$ или $a \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty),$ система не имеет решений (прямая не пересекает окружность - случай в.

2. Метод алгебраического сложения

Этот метод также использовался в 7 классе при решении систем линейных уравнений. Его можно использовать для того, чтобы или получить уравнение только с одной переменной, или найти более простую (желательно линейную) связь между переменными.

Пример 4

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3(x+1)^2 - 2(y+3)^3 = 10, \\ 5(x+1)^2 + 2(y+3)^3 = 22. \end{cases}$

Сложим уравнения системы и получим уравнение для x: $8(x + 1)^2 = 32$ или $(x + 1)^2 = 4$, откуда $x + 1 = \pm 2$ и $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Подставим выражение $(x + 1)^2 = 4$, например, в первое уравнение. Имеем: $12 – 2(y + 3)^3 = 10$, откуда $(y + 3)^3 = 1$ или $y + 3 = 1$ и $y = -2$. Итак, система уравнений имеет два решения: (1; -2) и (-3; -2).

Пример 5

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2xy + 3x + 2y = 12, \\ 3xy + 5x - y = 15. \end{cases}$

В уравнениях имеется только один член второй степени - член, пропорциональный xy. Поэтому от него надо избавиться. Для этого первое уравнение умножим на 3, второе - на (-2). Получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} 6xy + 9x + 6y = 36, \\ -6xy - 10x + 2y = -30. \end{cases}$ Сложим уравнения системы: $(6xy + 9x + 6y) + (-6xy - 10x + 2y) = 36 - 30$ или $8y - x = 6$. Тем самым мы нашли *линейную связь между переменными*. Из равенства $8y - x = 6$ выразим $x = 8y - 6$. Подставим это выражение, например, в первое уравнение исходной системы. Получаем уравнение с одной переменной: $2(8y + 6)y + 3(8y - 6) + 2y = 12$ или $8y^2 + 7y - 15 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = -15/8$. Используя формулу $x = 8y - 6$, для каждого значения y найдем соответствующее значение x: $x_1 = 8 \cdot 1 - 6 = 2$ и $x_2 = 8 \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) - 6 = -21.$ Итак, система имеет два решения: (2; 1) и $\left(-21; -\frac{15}{8}\right).$

3. Метод введения новых переменных

Для уравнений с одной переменной такой метод был использован в 8 классе. Он применяется, чтобы получить более простое уравнение. Метод введения новых переменных часто используется и для решения систем уравнений. Его можно применять как для одного уравнения системы, так и для всех уравнений. С помощью такого метода можно или найти связь между переменными, или получить более простую систему уравнений.

Пример 6

Решим систему уравнений $\begin{cases} 5\dfrac{2x-y}{x+y}+4\dfrac{x+y}{2x-y}=9, \\ 3x^2-15y^2=-33. \end{cases}$

Характерна структура первого уравнения: в него входит выражение $\dfrac{2x-y}{x+y}$ и обратное выражение $\dfrac{x+y}{2x-y}$. Поэтому введем новую переменную $t=\dfrac{2x-y}{x+y}$ и запишем первое уравнение в виде $5t+\dfrac{4}{t}=9$ или $5t^2 - 9t + 4 = 0$. Его корни $t_1 = 1$ и $t_2 = 4/5$. Вернемся к старым переменным. Получаем два случая: $\dfrac{2x-y}{x+y}=1$ (тогда 2x - y = x + y и x = 2y) и $\dfrac{2x-y}{x+y}=\dfrac{4}{5}$ (тогда 10x – 5y = 4x + 4y и x = 3/2y). Таким образом, с помощью новой переменной t нашли линейную связь между неизвестными x и y.

Далее используем второе уравнение исходной системы. Получаем две более простые системы уравнений:

а) $\begin{cases} x=2y, \\ 3x^2-15y^2=-33. \end{cases}$ Подставим первое уравнении во второе. Имеем: $3\cdot(2y)^2 - 15y^2 = -33$ или $-3y^2 = -33$, откуда $y^2 = 11$ и $y = \pm\sqrt{11}$. Находим соответствующие значения: $x=2(\pm\sqrt{11})=\pm2\sqrt{11};$

б) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ 3x^2-15y^2=-33. \end{cases}$ Подставим первое уравнение во второе. Имеем: $3\cdot\left(\dfrac{3}{2}y\right)^2-15y^2=-33$ или $-\dfrac{33}{4}y^2=-33,$ откуда $y^2 = 4$ и $y = \pm2$. Находим соответствующие значения $x=\dfrac{3}{2}\cdot(\pm2)=\pm3.$

Таким образом, данная система уравнений имеет четыре решения: $(2\sqrt{11};\ \sqrt{11}), (-2\sqrt{11};\ -\sqrt{11}), (3;\ 2), (-3;\ -2).$

Пример 7

Решим систему уравнений $\begin{cases} 5\dfrac{3x-2}{2y+1}+4\dfrac{2x+1}{3y-2}=14, \\ 15\dfrac{3x-2}{2y+1}+8\dfrac{2x+1}{3y-2}=35. \end{cases}$

В эту систему уравнении входят только дроби $\dfrac{3x-2}{2y+1}$ и $\dfrac{2x+1}{3y-2}.$ Поэтому введем две новые переменные: $a=\dfrac{3x-2}{2y+1}$ и $b=\dfrac{2x+1}{3y-2}.$

Тогда данная система уравнений становится *более простой* (*линейной*): $\begin{cases} 5a+4b=14, \\ 15a+8b=35. \end{cases}$ Решим эту систему линейных уравнений, например, методом алгебраического сложения. Умножим первое уравнение на (-2) и получим систему $\begin{cases} -10a-8b=-28, \\ 15a+8b=35. \end{cases}$ Сложим эти уравнения: 5a = 7, откуда a = 7/5. Подставим величину a = 7/5, например, в первое уравнение исходной системы: $5\cdot\dfrac{7}{5}+4b=14$ или 4b = 7, откуда b = 7/4.

Вернемся к старым переменным и получим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2y+1}=\dfrac{7}{5}, \\ \dfrac{2x+1}{3y-2}=\dfrac{7}{4}, \end{cases}$ или $\begin{cases} 15x-10=14y+7, \\ 8x+4=21y-14, \end{cases}$ или $\begin{cases} 15x-14y=17, \\ 8x-21y=-18. \end{cases}$ Эта система является линейной. Опять используем метод алгебраического сложения. Умножим первое уравнение на 3, второе уравнение - на (-2). Имеем систему уравнений: $\begin{cases} 45x-42y=51, \\ -16x+42y=36. \end{cases}$ Сложим эти уравнения: 29x = 87, откуда x = 3. Подставим значение x = 3 в первое уравнение: 15 · 3 - 14y = 17 или -14y = -28, тогда y = 2.

Итак, данная система имеет единственное решение (3; 2).

IV. Контрольные вопросы

1. Как используется метод подстановки для решения систем уравнений?
2. Объясните метод алгебраическою сложения.
3. Метод введения новых переменных.

V. Задание на уроках

§ 6, № 1 (б); 3 (а); 5 (б); 7 (а, г); 8 (б); 9 (г); 10 (б); 13 (а); 14 (в); 15 (а); 16 (б); 20 (а); 21 (б); 22 (а); 23 (б); 24 (а).

VI. Задание на дом

§ 6, № 1 (г); 3 (б); 5 (г); 7 (б, в); 8 (г); 9 (б); 10 (г); 13 (б); 14 (г); 15 (б); 16 (г); 20 (б); 21 (в); 22 (б); 23 (а); 24 (б).

VII. Подведение итогов уроков