Множества и операции над ними

Цель: познакомить с элементами теории множеств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Методом интервалов решите неравенство:

а) $(2x-3)(x+1) \geq 0;$

б) $\dfrac{4x^2+4x-3}{x-1} \leq 0.$

2. Найдите область определения функции $y = 3\sqrt{6x-x^2}.$

Вариант 2

1. Методом интервалов решите неравенство:

а) $(5x-2)(x+3) \leq 0;$

б) $\dfrac{9x^2+3x-2}{x+2} \geq 0.$

2. Найдите область определения функции $y = 2\sqrt{7x-x^2}.$

III. Изучение нового материала

Этот урок имеет вспомогательный характер: из теории множеств нужны простейшие понятия, необходимые для грамотной записи ответов в алгебраических задачах. Поэтому изложим материал урока предельно кратко и в минимально необходимом объеме для дальнейшего изучения курса 9 класса.

1. Понятие множества

Множеством называют совокупность элементов, отобранных по определенному признаку (признакам). Множество может содержать конечное или бесконечное количество элементов, а также вообще не иметь элементов (во многих случаях заранее неизвестно, будут ли в рассматриваемом множестве элементы).

Пример 1

а) Множество А простых делителей числа 30 состоит из трех элементов: 2; 3; 5.

б) Множество В натуральных четных чисел содержит бесконечное количество элементов: 2; 4; 6; ... .

в) Множество С корней уравнения $|x| + 3x^2 + 5 = 0$ не содержит ни одного элемента.

Если множество содержит небольшое число элементов, то обычно такое множество задают перечислением его элементов.

В примере 1а множество А = {2; 3; 5}. В случае бесконечного количества элементов множество также можно задавать перечислением нескольких первых элементов, так чтобы было понято правило отбора элементов множества. В примере 1б множество В = {2; 4; 6; ...}. Для наиболее часто встречающихся в математике числовых множеств есть специальные обозначения:

R - множество действительных чисел,

Q - множество рациональных чисел,

Z - множество целых чисел,

N - множество натуральных чисел.

Для обозначения пустого множества (т. е. множества, не содержащего элементов) вводится специальный символ Ø.

Вообще говоря, способы задания множеств могут быть самыми разнообразными.

Пример 2

а) Множество $(x|3 \leq x < \sqrt{17}\}$ - множество всех чисел, которые не меньше 3 и меньше $\sqrt{17}$, т. е. промежуток $[3; \sqrt{17})$ или $\{x|3 \leq x < \sqrt{17}\} = [3; \sqrt{17})$.

б) Множество $\{x|x^2 - 4 < 0\}$ - множество решений неравенства $x^2 - 4 < 0$, т. е. промежуток (-2; 2) или $\{x|x^2 - 4 < 0\} = (-2; 2)$.

в) Множество $\{x|(3x - 2)(x + 1) = 0\}$ - множество решений уравнения $(3x - 2)(x + 1) = 0$, т. е. числа $x_1 = 2/3$ и $x_2= -1$ или $\{x|(3x-2)(x+1)=0\}=\left\{\frac{2}{3};\ -1\right\}.$

Во многих случаях необходимо выяснить, является ли а элементом множества А (или принадлежит ли элемент а множеству А), и записать результат. Для подобных случаев существуют специальные обозначения:

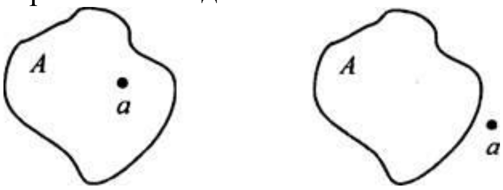
$a \in A$ - элемент а принадлежит множеству А,

$a \notin A$ - элемент а не принадлежит множеству А.

Пример 3

Пусть множество $A = \{2; \sqrt{5}; 4\}$. Тогда $\sqrt{5} \in A$, а $3 \notin A$.

Для иллюстрации в теории множеств пользуются *диаграммами Эйлера*. Рассматривают в качестве множества А множество точек плоской фигуры. Тогда понятия принадлежности и непринадлежности элемента а множеству А можно изобразить наглядно.

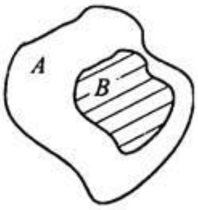


2. Подмножество

Во многих случаях рассматривают не все элементы множества А, а только часть этих элементов. Тогда говорят, что эта часть элементов является подмножеством В множества А. Дадим более строгое определение подмножества.

Определение 1. Если каждый элемент множества В является элементом множества А, то множество В называют подмножеством множества А.

Такую ситуацию обозначают символом $\subset$ (знак $\subset$ - знак включения), т. е. $B \subset A$. Наглядно подмножество можно иллюстрировать диаграммой Эйлера.



Пример 4

Рассмотрим множество $A = \{1; 2; 3\}$, состоящее из грех элементов. Какие подмножества есть у этого трехэлементного множества? Перечислим их.

Одноэлементные подмножества: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

Двухэлементные подмножества: $\{1,2\}$, $\{2; 3\}$, $\{1; 3\}$.

Трехэлементное подмножество - само множество $A = \{1; 2; 3\}$.

Подмножество без элементов - пустое множество $\varnothing$.

Всего можно получить $2^3 = 8$ подмножеств. Вообще говоря, множество, состоящее из n элементов, содержит 2^nподмножеств.

Пример 5

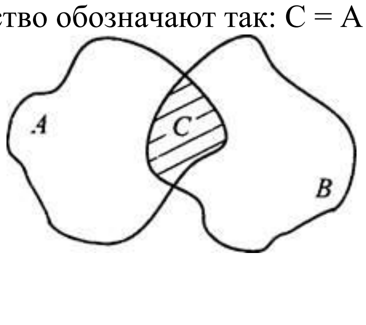
Разберемся с основными числовыми множествами. Очевидно, множество натуральных чисел N - часть множества целых чисел Z, которое, в свою очередь, - часть множества рациональных чисел Q. Последнее множество Q - часть множества действительных чисел R.

Весь этот абзац математически записывается кратко и четко: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

3. Пересечение и объединение множеств

Рассмотрим две основные *операции над множествами*: пересечение и объединение множеств.

Определение 2. Пересечением множеств А и В называют множество С, состоящее из всех общих элементов множеств А и В. Это множество обозначают так: $C = A \cap B = \{x|x \in A \text{ и } x \in B\}$.



Пример 6

Пусть A = {1; 5; 7; 2; 3} и B = {3; 5; 4; 8; 1}.

Найдем пересечение этих множеств $C = A \cap B = \{1; 3; 5\}$.

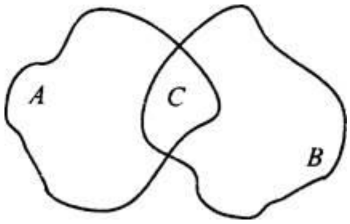
Пример 7

Пусть множество A = [2; 7] и множество B = (3; 9).

Очевидно, пересечением этих промежутков является множество $C = A \cap B = (3; 7]$.

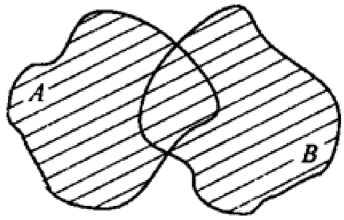
Пример 8

После страшной битвы вся команда пиратского корабля получила ранения: ранены в руку - 40 человек, в ногу - 80 пиратов, невезучие (ранены и в руку, и в ногу) - 30 человек. Сколько пиратов в команде корабля?



Пусть A - множество человек, раненных в руку (40 чел.), B - множество пиратов, раненных в ногу (80 чел.), и $C = A \cap B$ - множество человек, получивших два ранения (30 чел.). Найдем число пиратов, раненных только в руку: 40 - 30 = 10 - и только в ногу: 80 - 30 = 50. Так как каждый пират имеет хотя бы одно ранение, то всего пиратов: 10 + 50 + 30 = 90 человек.

Определение 3. Объединением множества A и B называют множество C, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B. Это множество обозначают так: $C = A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$.



Пример 9 (сравните с примером 6)

Пусть A = {1; 5; 7; 2; 3} и B = {3; 5; 4; 8; 1}. Найдем объединение этих множеств $C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

Пример 10 (сравните с примером 7)

Пусть множество A = [2; 7] и множество B = (3; 9). Очевидно, объединением этих промежутков является множество $C = A \cup B = [2; 9)$.

IV. Контрольные вопросы

1. Что называют множеством?
2. Как обозначаются основные числовые множества?
3. Определение подмножества B множества A.
4. Операция пересечение множеств.
5. Объединение множеств.

V. Задание на уроках

§ 3, № 1 (а, в); 3 (а, г); 7; 10; 12 (а, в); 13; 15 (а, г); 20 (б); 23.

VI. Задание на дом

§ 3, № 1 (б, г); 3 (б, в); 8; 11; 12 (б, г); 14; 15 (б, в); 20 (в); 24.

VII. Подведение итогов уроков