ОБ АКСИОМАХ ПЛАНИМЕТРИИ

<table>
<tr><td>Цель деятельности учителя</td><td colspan="2">Создать условия для систематизации знаний по теме «Аксиомы планиметрии»</td></tr>
<tr><td>Термины и понятия</td><td colspan="2">Плоскость, прямая, точка</td></tr>
<tr><td colspan="3">Планируемые результаты</td></tr>
<tr><td colspan="2">Предметные умения</td><td>Универсальные учебные действия</td></tr>
<tr><td colspan="2">Владеют базовым понятийным аппаратом по основным разделам содержания</td><td>Познавательные: имеют первоначальные представления об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки, о средстве моделирования явлений и процессов; осознанно владеют логическими действиями определения понятий, обобщения, установления аналогий.
Регулятивные: принимают и сохраняют цели и задачи учебной деятельности.
Коммуникативные: умеют формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение, работать в паре.
Личностные: имеют целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики</td></tr>
<tr><td colspan="3">Организация пространства</td></tr>
<tr><td>Формы работы</td><td colspan="2">Фронтальная (Ф); индивидуальная (И)</td></tr>
<tr><td>Образовательные ресурсы</td><td colspan="2">• Сведения из справочной литературы о развитии геометрии как науки;
• задания для фронтальной работы</td></tr>
<tr><td colspan="3">I этап. Актуализация опорных знаний учащихся</td></tr>
<tr><td>Цель деятельности</td><td colspan="2">Совместная деятельность</td></tr>
<tr><td>Оценить сообщения учащихся о развитии геометрии</td><td colspan="2">(Ф/И) Учащиеся делают сообщения о развитии геометрии (см. Ресурсный материал)</td></tr>
<tr><td colspan="3">II этап. Решение задач</td></tr>
<tr><td>Цель деятельности</td><td colspan="2">Совместная деятельность</td></tr>
<tr><td>Совершенствовать навыки решения задач</td><td colspan="2">(Ф/И)
Решить задачи на доске и в тетрадях.
1) Найдите ошибку и обоснуйте свой ответ.</td></tr>
</table>

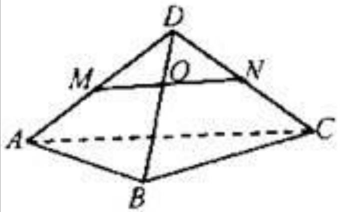

Рис. 1

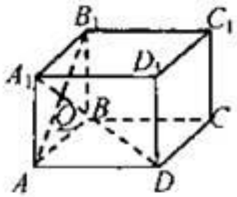

Рис. 2

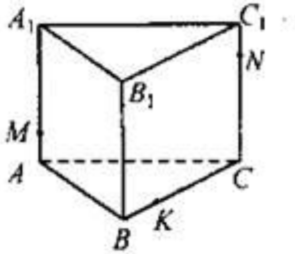

Рис. 3

2) По чертежу (рис. 4) назовите:

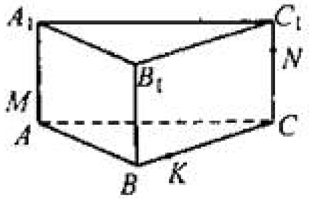

Рис. 4

а) линию пересечения плоскостей (ABC) и (AA_1B_1);
б) плоскости, которым принадлежат точка M, точка B;
в) плоскость, в которой лежит прямая MN; прямая KN.
3) Постройте: а) точку пересечения прямой MN к плоскости (ABC); б) точку пересечения прямой MN и плоскости ($A_1B_1C_1$); в) линию пересечения плоскостей (ABC) и (MNK); г) точку пересечения прямой KN с плоскостью (ABC); д) линию пересечения плоскостей (AA_1B_1) и (MNK)

III этап. Итоги урока. Рефлексия

Деятельность учителя	Деятельность учащихся
(Ф/И) - Что узнали на уроке? - На какие четыре этапа делится история развития геометрии?	(И) Домашнее задание: прочитать статью в учебнике на с. 341-344

Ресурсный материал

Развитие геометрии

В развитии геометрии можно выделить *четыре* основных периода. *Первый* - период зарождения геометрии как математической науки - протекал в Древнем Египте, Вавилоне и Греции примерно до V в. до н. э. Первичные геометрические сведения появляются на самых ранних ступенях развития

общества. Зачатками науки следует считать установление первых общих закономерностей, в данном случае - зависимостей между геометрическими величинами. Самое раннее сочинение, содержащее геометрические сведения, дошло до нас из Древнего Египта и относится примерно к XVII в. до н. э., но и оно, несомненно, не первое. Геометрические сведения того периода были немногочисленны и сводились прежде всего к вычислению некоторых площадей и объемов. Они излагались в виде правил, по-видимому, в большой мере эмпирического происхождения, логические же доказательства были, вероятно, еще очень примитивными. Геометрия, по свидетельству греческих историков, была перенесена в Грецию из Египта в VII в. до н. э. Здесь на протяжении нескольких поколений она складывалась в стройную систему. Процесс этот происходил путем накопления новых геометрических знаний, выяснения связей между разными геометрическими фактами, выработки приемов доказательств и, наконец, формирования понятий о фигуре, геометрическом предложении и доказательстве. Геометрия превратилась в самостоятельную математическую науку: появились систематические ее изложения, где ее предложения последовательно доказывались. С этого времени начинается *второй* период развития геометрии. Известны упоминания о систематических изложениях геометрии, среди которых данное в V в. до н. э. Гиппократом Хиосским. Сохранились и сыграли в дальнейшем решающую роль появившиеся около 300 лет до н. э. «Начала» Евклида. Здесь геометрия представлена так, как ее в основном понимают и теперь, если ограничиваться элементарной геометрией; это наука о простейших пространственных формах и отношениях, развиваемая в логической последовательности исходя из явно формулированных основных положений (аксиом) и основных пространственных представлений. Геометрия, развиваемая на этих основаниях (аксиомах), уточненная и обогащенная как в предмете, так и в методах исследования, называется евклидовой. В Греции к ней добавляются новые результаты: возникают новые методы определения площадей и объемов (Архимед, III в. до н. э.), учение о конических сечениях (Аполлоний Пергский, III в. до н. э.), присоединяются зачатки тригонометрии (Гиппарх, II в. до н. э.) и геометрии на сфере (Менелай, I в. н. э.). Упадок античного общества привел к некоторому застою в развитии геометрии, однако она продолжала развиваться в Индии, Средней Азии, в странах арабского Востока. Возрождение наук и искусств в Европе повлекло дальнейший расцвет геометрии. Принципиально новый шаг был сделан в 1-й половине XVII в. Р. Декартом, который ввел метод координат, позволивший связать геометрию с развивавшейся алгеброй и зарождающимся анализом. Применение методов этих наук в геометрии породило аналитическую геометрию, а потом и дифференциальную. Геометрия этого периода перешла на качественно новую ступень по сравнению с геометрией древних: в ней рассматриваются уже гораздо более общие фигуры и используются существенно новые методы. С этого времени начинается *третий* период развития геометрии. Аналитическая геометрия изучает фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями в прямоугольных координатах, используя при этом методы алгебры. Дифференциальная геометрия, возникшая в XVIII в. в результате работ Л. Эйлера, Монжа и др., исследует уже любые достаточно гладкие кривые линии и поверхности, их семейства (то есть их непрерывные совокупности) и преобразования. (Понятию «дифференциальная геометрия» придается теперь часто более общий смысл; ее название связано в основном с методом, исходящим из дифференциального исчисления.) К 1-й половине XVII в. относится зарождение проективной геометрии в работах Ж. Дезарга и Б. Паскаля. Она возникла из задач изображения тел на плоскости; ее первый предмет составляют те свойства плоских фигур, которые сохраняются при проектировании с одной плоскости на другую из любой точки. Окончательное оформление и систематическое изложение этих новых направлений геометрии были даны в XVIII - начале XIX вв. Эйлером для аналитической геометрии (1748 г.), Монжем для дифференциальной геометрии (1795 г.), Ж. Понселе для проективной геометрии (1822 г.), причем само учение о геометрическом изображении (в прямой связи с задачами черчения)

было еще раньше (1799 г.) развито и приведено в систему Монжем в виде начертательной геометрии. Во всех этих новых дисциплинах основы (аксиомы, исходные понятия) геометрии оставались неизменными, круг же изучаемых фигур и их свойств, а также применяемых методов расширялся. *Четвертый*
период в развитии геометрии открывается построением Н. И. Лобачевским в 1826 г. новой, неевклидовой геометрии, называемой теперь геометрией Лобачевского. Независимо от Лобачевского в 1832 г. ту же геометрию построил Я. Больяй (подобные идеи развивал и К. Гаусс, но он не опубликовал их). Источник, сущность и значение идей Лобачевского сводятся к следующему. В геометрии Евклида имеется аксиома о параллельных, утверждающая: «через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более чем одну прямую, параллельную данной». Многие геометры пытались доказать эту аксиому, исходя из других основных посылок геометрии Евклида, но безуспешно. Лобачевский пришел к мысли, что такое доказательство невозможно. Утверждение, противоположное аксиоме Евклида, гласит: «через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не одну, а по крайней мере две параллельные ей прямые». Это и есть аксиома Лобачевского. По мысли Лобачевского, присоединение этого положения к другим основным положениям геометрии приводит к логически безупречным выводам. Система этих выводов и образует новую, неевклидову геометрию. Заслуга Лобачевского состоит в том, что он не только высказал эту идею, но действительно построил и всесторонне развил новую геометрию, логически столь же совершенную и богатую выводами, как евклидова, несмотря на ее несоответствие обычным наглядным представлениям. Лобачевский рассматривал свою геометрию как возможную теорию пространственных отношений; однако она оставалась гипотетической, пока не был выяснен (в 1868 г.) ее реальный смысл и тем самым не было дано ее полное обоснование, Лобачевский был назван «Коперником геометрии». В его идеях были намечены три принципа, определившие новое развитие дисциплины. Первый принцип заключается в том, что логически мыслима не одна евклидова геометрия, но и другие «геометрии». Второй принцип - это принцип самого построения новых геометрических теорий путем видоизменения и обобщения основных положений евклидовой геометрии. Третий принцип состоит в том, что истинность геометрической теории, в смысле соответствия реальным свойствам пространства, может быть проверена лишь физическим исследованием, и не исключено, что такие исследования установят, в этом смысле, неточность евклидовой геометрии. Современная физика подтвердила это. Однако нельзя отрицать математическую точность евклидовой геометрии, так как она определяется логической состоятельностью (непротиворечивостью) этой геометрии. Точно так же в отношении любой геометрической теории нужно различать их физическую и математическую истинность; первая состоит в проверяемом опытом соответствии действительности, вторая - в логической непротиворечивости. Лобачевский дал, таким образом, материалистическую установку философии математики. Перечисленные общие принципы сыграли важную роль не только в геометрии, но и в математике вообще, в развитии ее аксиоматического метода, в понимании ее отношения к действительности. Главная особенность нового периода в истории геометрии, начатого Лобачевским, состоит в развитии новых геометрических теорий - новых «геометрий» и в соответствующем обобщении предмета геометрии; возникает понятие о разного рода «пространствах» (термин «пространство» имеет в науке два значения: с одной стороны, это обычное реальное пространство, с другой - абстрактное «математическое пространство»). При этом некоторые теории складывались внутри евклидовой геометрии в виде ее особых глав и лишь потом получали

самостоятельное значение. Так складывались проективная, аффинная, конформная геометрия и другие дисциплины, предметом которых являются свойства фигур, сохраняющиеся при соответствующих (проективных, аффинных, конформных и др.) преобразованиях. Возникли понятия проективного, аффинного и конформного пространств; сама евклидова геометрия стала рассматриваться в известном смысле как глава проективной геометрии. Другие теории, подобно геометрии Лобачевского, с самого начала строились на основе изменения и обобщения понятий евклидовой геометрии. Так создавалась, например, многомерная геометрия; первые относящиеся к ней работы (Геометрия Грасман и А. Кэли, 1844) представляли формальное обобщение обычной аналитической геометрии с трех координат на п. Некоторый итог развития всех этих новых «геометрий» подвел в 1872 г. Ф. Клейн, указав общий принцип их построения. Принципиальный шаг был сделан Б. Риманом (лекция 1854, опубликована 1867). Во-первых, он ясно сформулировал обобщенное понятие пространства как непрерывной совокупности любых однородных объектов или явлений. Во-вторых, он ввёл понятие пространства с законом измерения расстояний бесконечно малыми шагами (подобно измерению длины линии очень малым масштабом). Отсюда развилась обширная область геометрии, так называемая риманова геометрия, нашедшая важные приложения в теории относительности, в механике и др. В тот же период зародилась топология как учение о тех свойствах фигур, которые зависят лишь от взаимного прикосновения их частей и которые тем самым сохраняются при любых преобразованиях, не нарушающих и не вводящих новых прикосновений, то есть происходящих без разрывов и склеиваний. В XX в. топология развилась в самостоятельную дисциплину.
Так геометрия превратилась в разветвленную и быстро развивающуюся в разных направлениях совокупность математических теорий, изучающих разные пространства (евклидово, Лобачевского, проективное, римановы и т. д.) и фигуры в этих пространствах.
Одновременно с развитием новых геометрических теорий велась разработка уже сложившихся областей евклидовой геометрии - элементарной, аналитической и дифференциальной геометрии. В евклидовой геометрии появились и новые направления. Предмет геометрии расширился и в том смысле, что увеличился круг исследуемых фигур, круг изучаемых свойств фигур, расширилось само понятие о фигуре. В 70-х гг. XIX в. возникла общая теория точечных множеств, которая, однако, уже не причисляется к геометрии, а составляет особую дисциплину. Фигура стала определяться в геометрии как множество точек. Развитие геометрии было тесно связано с глубоким анализом тех свойств пространства, которые лежат в основе евклидовой геометрии. Иными словами, оно было связано с уточнением оснований самой евклидовой геометрии. Эта работа привела в конце XIX в. (Д. Гильберт и др.) к точной формулировке аксиом евклидовой геометрии, а также других «геометрий».