Определение числовой функции. Область определения, область значений функции (4ч)

Цель: уточнить понятие функции и ее основные характеристики: область определения и область значений.

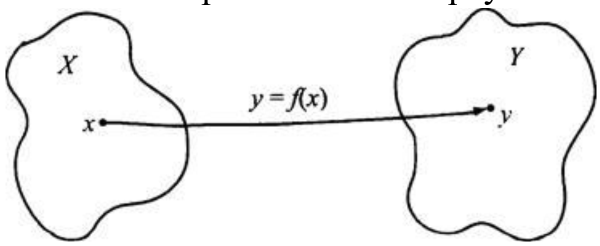
Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

С понятием функции школьники познакомились уже в 7 классе. Теперь необходимо уточнить и развить это понятие.

Определение 1. Пусть даны числовые множества X и Y. Если указано правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из X определенный элемент y из множества Y, то говорят, что задана функция y = f(x) с областью определения X и областью значений Y. При этом переменную x называют независимой переменной или аргументом, переменную y - зависимой переменной.



Для области определения функции y = f(x) принято обозначение D(f), для области значений - обозначение E(f).

Пример 1

Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x-3}-1$. Чтобы найти значение y для каждой величины x, надо выполнить следующие действия (операции):

1) из величины x вычесть число 3 (получим величину x - 3);

2) из полученного результата извлечь квадратный корень (получим значение $\sqrt{x-3}$);

3) из этой величины вычесть число 1 (получим значение $\sqrt{x-3}-1$, т. е. значение функции y).

Совокупность этих операций (действий) и есть функция y = f(x) или $y=\sqrt{x-3}-1$. Очевидно, квадратный корень можно извлечь только из неотрицательной величины. Поэтому $x - 3 \geq 0$ и $x \geq 3$. Следовательно, область определения функции D(f) = [3; +∞). Квадратный корень (по определению) величина неотрицательная, т. е. $\sqrt{x-3}\geq 0$. Вычтем из обеих частей этого неравенства число 1 и получим: $\sqrt{x-3}-1\geq -1$, т. е. $y \geq -1$. Поэтому область значений функции E(f) = [-1; +∞).

Пример 2

Найдем область определения функции:

а) $y=2|x-1|-3x+4$;

б) $y=\dfrac{3x-2}{x+3}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$;

г) $y=\sqrt{(x-1)(x+2)^2}$.

В задаче функция задается некоторой формулой (выражением) и область определения функции совпадает с областью допустимых значений такого выражения.

а) В данное выражение входят операции сложения, вычитания, умножения и нахождения модуля. Все эти операции выполнимы при любых значениях переменной x, т. е. D(f) = $(-\infty; +\infty)$.

б) В выражение входит деление на величину, зависящую от переменной. Такая операция выполнима, если делитель не равен нулю. Получаем условие: $x + 3 \neq 0$, откуда $x \neq -3$. Поэтому область определения функции все значения x, за исключением точки (-3), т. е. D(f) = $(-\infty; -3)U(-3; +\infty)$ или D(f): $x \neq -3$.

в) В выражение входит операция извлечения квадратного корня из алгебраической дроби. Эта операция выполнима, если подкоренное выражение неотрицательно. Получаем неравенство: $\frac{1-x}{x+2} \geq 0,$ решение которого -2 < x √ 1. Поэтому область определения функции - промежуток (-2; 1], т. е. D(f) = (-2; 1].

г) Этот пункт аналогичен предыдущему. Область определения функции задается условием $(x - 1)(x + 2)^2 \geq 0$. Решение такого неравенства: отдельная точка x = -2 и промежуток $x \in [1; +\infty)$. Поэтому область определения функции D(f) = $\{-2\}U[1; +\infty)$.

Заметим, что в этом примере область определения функции явно не указывалась. Такую область находили, учитывая ОДЗ выражения, задающего функцию. Эту область определения иногда называют *естественной*.

Запись f(a) означает значение функции в точке x = a. Чтобы найти это значение в формуле, задающую функцию, вместо аргумента надо подставить величину a.

Пример 3

Рассмотрим линейную функцию y = 2x + 3. Найдем:

а) $f(5)$; б) $f(x - 4)$; в) $f(3x + 1)$; г) $f(f(x))$.

а) Вместо аргумента x подставим число 5 и найдем значение функции $f(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13.$

б) Вместо аргумента x подставим величину x - 4 и получим: $f(x-4) = 2(x-4) + 3 = 2x - 5.$

в) Аналогично предыдущему пункту вместо аргумента x подставим величину 3x + 1 и найдем значение функции $f(3x + 1) = 2(3x + 1) + 3 = 6x + 5.$

г) В этом случае рассматривается, т. е. функция, аргументом которой тоже является функция. Получаем: $f(f(x)) = f(2x + 3) + 3 = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9.$

Подобным образом поступают и в случае кусочной функции.

Пример 4

Рассмотрим функцию y = f(x), где
$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \in (-\infty; -1), \\ 1, \text{ если } x \in [-1; 1], \\ \frac{1}{x}, \text{ если } x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Найдем: f(-3); f(-1); f(0); f(1); f(5).

Область определения функции состоит из трех промежутков: $(-\infty; -1)$, [-1; 1] и $(1; +\infty)$. Объединив их, получим всю числовую ось, т. е. D(f) = $(-\infty; +\infty)$. При вычислении значения f(a) надо определить, в какой промежуток попадает точка a. Тогда по соответствующей формуле находим величину f(a).

Точка x = -3 принадлежит первому промежутку. Поэтому используем первую формулу и получаем: $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Точки x = -1, x = 0, x = 1 лежат во втором промежутке. Используем вторую строчку формулы, задающей функцию. Находим: f(-1) = f(0) = f(1) = 1.

Точка x = 5 принадлежит третьему промежутку. Используем третью формулу и получаем: f(5) = 1/5 = 0,2.

Часто возникает *обратная задача*: известно значение функции f(x) в точке a (зависящей от переменной x) и надо найти функцию f(x).

Пример 5

Известно, что $f\left(3-\frac{x}{2}\right)=x^2-x+2.$ Найдем f(x).

Обозначим $t=3-\frac{x}{2}$ и выразим из этого равенства переменную x = 6 – 2t. Перепишем условие задачи в виде $f(t)=(6-2t)^2-(6-2t)+2=4t^2-22t+30.$ Получили: f(t) = $4t^2$ – 22t + 30. Так как аргумент функции можно обозначать любой буквой: t, v, x и т. д., то сразу можно записать: f(x) = $4x^2$ - 22x + 30.

Существуют и более сложные задачи, которые решаются подобным образом.

Пример 6

Известно, что $2f(x-2)+3f(2-x)=x^2+3x-1.$

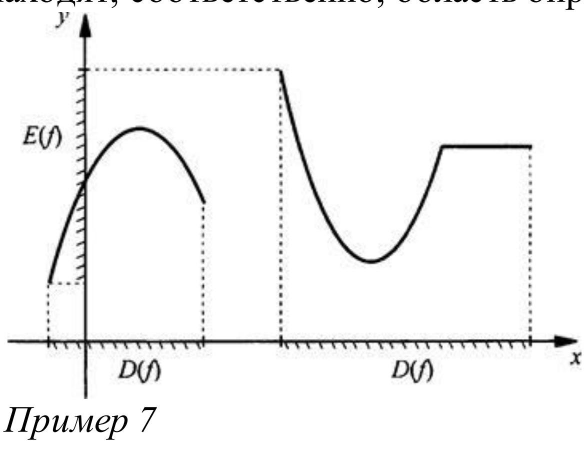
Обозначим t = x - 2 (тогда x = t + 2) и запишем условие задачи: $2f(t)+3f(-t)=(t+2)^2+3(t+2)-1=t^2+7t+9.$ Это равенство запишем также для точки (-t). Получаем: $2f(-t)+3f(t)=(-t)^2+7(-t)+9=t^2-7t+9.$ Итак, для нахождения f(t) имеем систему уравнений: $\begin{cases}2f(t)+3f(-t)=t^2+7t+9,\\3f(t)+2f(-t)=t^2-7t+9.\end{cases}$

Введем новые переменные: a = f(t) и b = f(-t). Получаем систему линейных уравнений: $\begin{cases}2a+3b=t^2+7t+9,\\3a+2b=t^2-7t+9,\end{cases}$ в которой нас интересует только переменная a. Поэтому используем способ алгебраического сложения. Первое уравнение умножим на число (-2), второе - на число 3. Имеем систему: $\begin{cases}-4a-6b=-2t^2-14t-18,\\9a+6b=3t^2-21t+27.\end{cases}$ Сложим уравнения системы: 5a = t^2 – 35t + 9, откуда $a=\frac{1}{5}t^2-7t+\frac{9}{5}$ или $f(t)=\frac{1}{5}t^2-7t+\frac{9}{5}.$ Так же как и в предыдущей задаче, можно написать: $f(x)=\frac{1}{5}x^2-7x+\frac{9}{5}.$

Поведение функции в математике принято изображать специальным рисунком - графиком.

Определение 2. Графиком функции y = f(x), x ∈ X, называют множество F точек (x; y) координатной плоскости xOy: F = {(x; y)|x ∈ X, y = f(x)}.

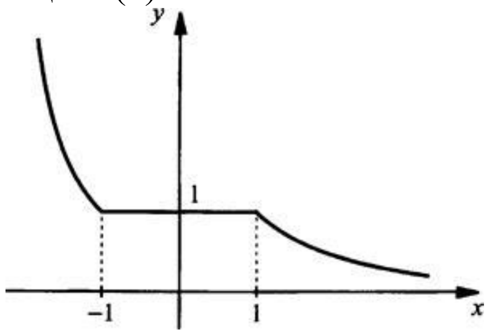
По графику функции легко установить область определения и область значений функции y = f(x). Для этого точки графика проецируют на ось абсцисс и ось ординат и находят, соответственно, область определения D(f) и область значений E(f).



Пример 7

Построим график функции y = f(x), где $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\in(-\infty;\,-1),\\ 1, \text{ если } x\in[-1;\,1],\\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x\in(1;\,+\infty)\end{cases}$ (пример 4).

Область определения функции состоит из трех промежутков, на каждом из которых функция задается своей формулой. На луче (-∞; -1) строим график функции $y = x^2$ (парабола), на промежутке [-1; 1] - график функции y = 1 (отрезок прямой) и на луче (1; +∞) - график функции y = 1/x (гипербола). Таким образом, получаем график функции f(x):



Область определения этой кусочной функции D(f) = (-∞; +∞) и область значений E(f) = (0; +∞).

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции и поясните его примером.
2. Область определения и область значений функции.
3. Определение графика функции.

IV. Задание на уроках

§ 8, № 2 (а, б); 3 (в); 4 (а); 7 (в); 9 (а, б); 13 (б, в); 16 (а); 17 (а, б); 20 (в, г); 21 (а); 22; 24 (а, в); 26 (б); 30 (а); 32 (в, г); 33 (а, б); 34; 37; 38.

V. Задание на дом

§ 8, № 2 (в, г); 3 (г); 4 (б); 7 (г); 9 (в, г); 13 (а, г); 16 (г); 17 (в, г); 20 (а, б); 21 (в); 23; 24 (б, г); 26 (в); 30 (г); 32 (а, б); 33 (в, г); 35; 36.

VI. Творческие задания

1. Найдите функцию f(x), если известно:

а) $f(x-3)=x^2-x$; б) $f(x+2)=x^2+2x$;

в) $f\left(2-\dfrac{x}{3}\right)=2x^2+x$; г) $f\left(1+\dfrac{x}{5}\right)=x^2-3x$;

д) $f(x+1)=\dfrac{x-1}{x+2}$; е) $f(x-1)=\dfrac{x+3}{x-4}$;

ж) $f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)=\sqrt{3x+2}$; з) $f\left(\dfrac{x}{3}+2\right)=\sqrt{3-2x}$.

Ответы: а) $f(x)=x^2+5x+6$; б) $f(x)=x^2-2x$; в) $f(x)=18x^2-$ $-39x+78$; г) $f(x)=25x^2-65x+40$; д) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$; е) $f(x)=\dfrac{x+4}{x-3}$; ж) $f(x)=\sqrt{6x+8}$; з) $f(x)=\sqrt{15-6x}$.

2. Найдите функцию f(x), если известно:

а) $3f(x-1)-2f(1-x)=2x^2-x+1;$

б) $2f(x+3)+f(-x-3)=x^2-3;$

в) $f(x+1)+2f(-x-1)=\dfrac{x+1}{x-2};$

г) $3f(x-2)-f(2-x)=\dfrac{x-3}{x+4};$

д) $2f(x)+3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+x-2;$

е) $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x^2-3x;$

ж) $3f(x)-2f(-x)=\sqrt{4x+3};$

з) $2f(x)+f(-x)=\sqrt{5-3x}.$

Ответы: а) $f(x)=\dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{3}{5}x+2;$ б) $f(x)=\dfrac{1}{7}x^2-\dfrac{18}{7}x+\dfrac{6}{7};$
в) $f(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x}{x-3};$ г) $f(x)=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{x-1}{x+6}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{x+1}{x-6};$
д) $f(x)=-\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5x^2}+\dfrac{3}{5x}-\dfrac{2}{5};$ е) $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^2+x-\dfrac{4}{3x^2}+\dfrac{2}{x};$
ж) $f(x)=\dfrac{3}{5}\sqrt{4x+3}+\dfrac{2}{5}\sqrt{3-4x};$ з) $f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{5-3x}-\dfrac{1}{3}\sqrt{5+3x}.$

VII. Подведение итогов уроков