Основные понятия

Цель: ввести основные понятия и термины темы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

1. Рациональные уравнения с двумя переменными

Равенство, содержащее две переменные, называют уравнением с двумя переменными (или неизвестными). Решением уравнения с двумя переменными называют пару значений неизвестных, которые обращают это уравнение в верное равенство. Уравнение с двумя переменными может иметь бесконечное множество решений или ограниченное число решений, а также не иметь решений.

Пример 1

Рассмотрим следующие уравнения с двумя переменными.

а) Уравнение $3x + 7y = 10$ (уравнение прямой) имеет бесконечное множество решений.

б) Уравнение $|x - 1| + y^2 = 0$ имеет единственное решение $x = 1$, $y = 0$.

в) Уравнение $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$ имеет четыре решения: $x = 1$, $y = 2$; $x = 1$, $y = -2$; $x = -1$, $y = 2$; $x = -1$, $y = -2$.

г) Уравнение $|x - 1| + (y - 2)^2 = -5$ не имеет решений.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными*.

Пример 2

а) Уравнения $|x| + (y - 1)^2 = 0$ и $x^2 + |y - 1| = 0$ равносильны, так как имеют одно и то же решение $x = 0$ и $y = 1$.

б) Уравнения $|x| + (y - 1)^2 = 0$ и $x^2 + |y^2 - 1| = 0$ неравносильны, так как первое имеет одно решение $x = 0$, $y = 1$, а второе - два решения: $x = 0$, $y = 1$ и $x = 0$, $y = -1$.

Уравнение вида $h(x; y) = g(x; y)$ (где $h(x; y)$, $g(x; y)$ - рациональные выражения) называют *рациональным уравнением с двумя переменными* x и y.

Пример 3

а) Уравнения $3x + y = 4$; $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = 1$; $x^2 + y^2 = 4$; $3x^2y + 2xy^2 = 5$ рациональные (по определению).

б) Уравнения $3\sqrt{x} = y$; $x^3 + \sqrt{x+y} = 2$; $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 4$ не являются рациональными, так как содержат операцию извлечения квадратного корня.

Целым уравнением называют рациональное уравнение, которое не содержит операцию деления на выражение с переменной.

Пример 4

а) Уравнения $2x + 3y = 5$; $x^2 + 4y^2 = 5$; $xy = 2$; $x^3 + 2y^2 = 3$ целые (по определению).

б) Уравнения $\frac{x}{y} + \frac{x-y}{x} = 1$; $\frac{x^2+y^2}{3xy} = 2$; $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 5$; $\frac{xy}{x-y} = 2$ не являются целыми, так как содержат операцию деления на выражение с переменной.

Степень целого уравнения с двумя переменными определяется так же, как и степень целого уравнения с одной переменной. Если одна часть уравнения представляет собой многочлен стандартного вида, а другая - число 0, то степень уравнения считают равной степени этого многочлена. Для определения степени уравнения его заменяют равносильным, одна часть которого - многочлен стандартного вида, а другая - нуль.

Пример 5

Уравнение $(x^3 + 2y^2)^2 = x^6 - 2x^2y$ равносильно уравнению $x^6 + 4x^3y^2 + 4y^4 = x^6 - 2x^2y$ и равносильно уравнению $2x^3y^2 + 2y^4 + x^2y = 0.$ Поэтому данное уравнение является уравнением пятой степени.

В случае целых уравнений распространены задачи, в которых надо найти *целочисленные решения*. Такие задачи рассматриваются уже свыше двух тысяч лет. Несмотря на это, общего алгоритма решения подобных уравнений (их называют диафантовыми уравнениями) не существует. Мы, естественно, ограничимся самыми простыми уравнениями.

Пример 6

Найдем целочисленные решения уравнения $3x + 6y = 391$.

Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение в виде $3(x + 2y) = 391$. Так как по условию x и y - целые числа, то выражение $x + 2y$ также является целым числом. Поэтому левая часть уравнения $3(x + 2y)$ - число, кратное 3. Правая часть - число 391 - делится на 3 с остатком. Получаем противоречие. Следовательно, данное уравнение целочисленных решений не имеет.

Пример 7

Найдем целочисленные решения уравнения 4x + 3y = 11.

Из выражения 4x + 3y = 11 получим переменную $y = \frac{11-4x}{3}$. Так как знаменатель этой дроби равен 3, то рассмотрим различные целые числа x по отношению к делителю 3. Возможны три ситуации:

а) число x кратно 3, т. е. x = 3n (где n ∈ Z). Тогда $y = \frac{11-4\cdot 3n}{3} = \frac{11}{3} - 4n$ не является целым числом:

б) число x при делении на 3 дает остаток 1, т. е. x = 3n + 1. Тогда $y = \frac{11-4(3n+1)}{3} = \frac{7-12n}{3} = \frac{7}{3} - 4n$ не является целым числом;

в) число x при делении на 3 дает остаток 2, т. е. x = 3n + 2. Тогда $y = \frac{11-4(3n+2)}{3} = \frac{3-12n}{3} = 1-4n$ является целым числом.

Таким образом, данное уравнение имеет бесконечное множество целочисленных решений (3n + 2; 1 – 4n), где n ∈ Z. Для наглядности в таблице приведены некоторые такие решения для некоторых значений n.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14
y	17	13	9	5	1	-3	-7	-11	-15

Рассмотрим теперь целые уравнения второй степени.

Пример 8

Найдем целочисленные решения уравнения $x^2 - 2xy - 3y^2 = -3$. Учтем, что левая часть уравнения - однородный многочлен второй степени по переменным x и y, и разложим его на множители. Будем считать, что x - переменная величина, а y - постоянная. По формулам Виета найдем корни квадратного уравнения $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$. Получаем: $x = y \pm \sqrt{y^2 + 3y^2} = y \pm 2y$, т. е. $x_1 = 3y$ и $x_2 = -y$. Тогда разложение многочлена имеет вид: (x - 3y)(x + y). Получаем уравнение (x – 3y)(x + 1) = -3.

Так как x и y по условию целые числа, то и числа x - 3y и x + y целые и являются делителями числа -3. Возможны четыре случая:

а) $\begin{cases} x-3y=1, \\ x+y=-3. \end{cases}$ Решение этой системы линейных уравнений (-2; 1) является целочисленным;

б) $\begin{cases} x-3y=-1, \\ x+y=3. \end{cases}$ Решение такой системы (2; 1) также является целочисленным;

в) $\begin{cases} x-3y=3, \\ x+y=-1. \end{cases}$ Решение системы (0; -1) целочисленное;

г) $\begin{cases} x-3y=-3, \\ x+y=1. \end{cases}$ Решение системы (0; 1) также целочисленное.

Таким образом, данное целое уравнение имеет четыре целочисленных решения: (-2; -1), (2; 1), (0; -1), (0; 1).

Пример 9

Найдем целочисленные решения уравнения xy + 2x - y = 5.

Данное целое уравнение также имеет вторую степень. Для его решения используем тот же прием, что и в предыдущем примере, - разложение левой части на множители. Для этого используем группировку членов. Получаем: (xy + 2x) - y = 5, или x(y + 2) - y - 2 = 5 - 2, или x(y + 2) - (y + 2) = 3, или (x - 1)(y + 2) = 3. Очевидно, что числа x - 1 и y + 2 целые и являются делителями числа 3. Возникают четыре ситуации:

а) $\begin{cases} x-1=1, \\ y+2=3. \end{cases}$ Решение этой системы (2; 1);

б) $\begin{cases} x-1=3, \\ y+2=1. \end{cases}$ Решение этой системы (4; -1);

в) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y+2=-3. \end{cases}$ Решение этой системы (0; -5);

г) $\begin{cases} x-1=-3, \\ y+2=-1. \end{cases}$ Решение этой системы (-2; -3).

Итак, данное уравнение имеет четыре целочисленных решения: (2; 1), (4; -1), (0; -5), (-2; -3).

Пример 10

Найдем целочисленные решения уравнения $(2x - y)^2 + 27(3x - y)^2 = 25$.

Для решения этой задачи удобно сделать оценки. Так как числа 2x-y и 3x-y целые и могут принимать значения 0; ±1; ±2; то их квадраты принимают значения 0; 1; 4; ... . Простейшие оценки показывают, что возможен единственный вариант: $(2x - y)^2 = 25$ и $(3x - y)^2 = 0$. Это приводит к двум системам линейных уравнений: $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x-y=0 \end{cases}$ (решение x = -5, y = -15) и $\begin{cases} 2x-y=-5, \\ 3x-y=0 \end{cases}$ (решение x = 5, y = 15).

Таким образом, данное уравнение имеет два целочисленных решения: (-5; -15) и (5; 15).

Из рассмотренных примеров видно, что для решения задач с одинаковой формулировкой использовались различные приемы:

1) разложение одной из частей уравнения на множители;

2) рассмотрение делимости с остатком одной из переменных;

3) оценки определенных комбинаций переменных.

2. График уравнения с двумя переменными

Графиком уравнения p(x; y) = 0 с двумя переменными называют множество точек координатной плоскости, координаты которых (x; y) являются решениями этого уравнения.

Пример 11

а) Графиком уравнения ax + by = c (где a ≠ 0 или b ≠ 0) является прямая.

б) Графиком уравнения $y = ax^2 + bx + c$ (где a ≠ 0) является парабола.

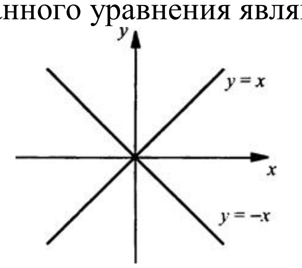
в) Графиком уравнения $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (где c ≠ 0 и ad - bc ≠ 0) является гипербола.

Рассмотрим более сложные задачи.

Пример 12

Построим график уравнения $x^2 - y^2 = 0$.

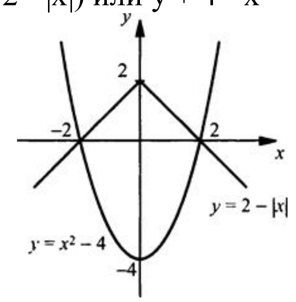
Разложим левую часть уравнения на множители: (x - y)(x + y) = 0. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем: x - y = 0 (откуда y = x) или x + y - 0 (тогда y = -x). Таким образом, графиком данного уравнения являются две прямые: y = x и y = -x.



Пример 13

Построим график уравнения $(y + |x| - 2)(y + 4 - x^2) = 0$.

Используем тот же подход, что и в предыдущей задаче. Опять произведение множителей равно нулю. Получаем: y + |x| - 2 = 0 (откуда y = 2 - |x|) или $y + 4 - x^2 = 0$ (тогда $y = x^2 - 4$).

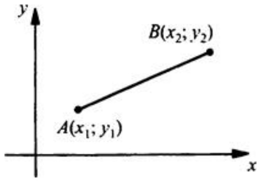


Итак, графиком данного уравнения являются модульная зависимость y = 2 - |x| и парабола $y = x^2 - 4$. График уравнения симметричен относительно оси ординат.

3. Формула расстояния между двумя точками координатной плоскости

График уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

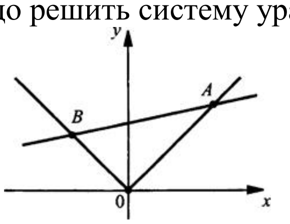
Теорема 1. Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ равно $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Доказательство теоремы приводить не будем: оно изложено в учебнике.



Пример 14

Найдите координаты точек пересечения графиков функций y = |x| и $y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$ и расстояние между этими точками.

Построим график данных функций и обозначим точки пересечения этих графиков буквами A и B. Для нахождения координат таких точек надо решить систему уравнений $\begin{cases} y=|x|, \\ y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}. \end{cases}$

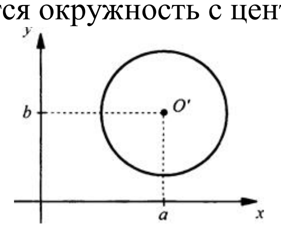


Сначала найдем координаты точки A. Как видно из рисунка, для этой точки координата x > 0. Поэтому получаем систему уравнений: $\begin{cases} y=x, \\ y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}. \end{cases}$ Подставим первое уравнение во второе. Имеем линейное уравнение: $x=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$ или 5x = x + 12, откуда x = 3 (тогда y = 3). Итак, нашли координаты точки A(3; 3).

Теперь определим координаты точки B. Для нее координата x < 0. Поэтому получаем систему уравнений: $\begin{cases} y=-x, \\ y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}. \end{cases}$ Вновь подставим первое уравнение во второе. Имеем линейное уравнение: $-x=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$ или -5x = x + 12, откуда x = -2 (тогда y = 2). Получили координаты точки B(-2; 2).

Найдем расстояние между точками A и B: $AB=\sqrt{(-2-3)^2+(2-3)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{26}.$

Теорема 2. Графиком уравнения является окружность с центром в точке O'(a; b) и радиусом r.



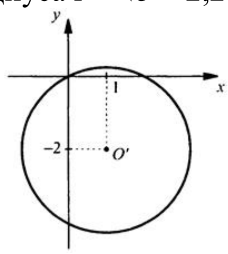
Доказательство этой теоремы также не приводим.

В частности, графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$ является окружность с центром в начале координат и радиусом r.

Пример 15

Построим график уравнения $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$.

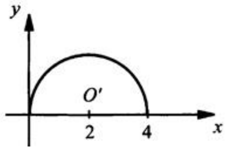
Так как в уравнение переменные x и y входят во второй степени (и ниже), то это уравнение окружности. Выделим в уравнении полные квадраты по переменным x и y. Для этого запишем уравнение в виде $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=5$ или $(x-1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{5})^2$ Видно, что это уравнение окружности с центром в точке O'(1; -2) и радиуса r = √5 ≈ 2,2. Теперь легко построить и сам график.



Пример 16

Построим график уравнения $y=\sqrt{4x-x^2}$.

Прежде всего, отметим, что y ≥ 0. Возведем обе части уравнения в квадрат: $y^2 = 4x - x^2$или $y^2 + x^2 - 4x = 0$. Выделим квадрат разности по переменной x: $y^2 + (x - 4x + 4) = 4$ или $(x - 2)^2 + y^2= 2^2$. Получили уравнение окружности с центром в точке O'(2; 0) и радиуса r = 2. Учитывая ограничение y ≥ 0, имеем верхнюю полуокружность. Теперь можно строить график.



Заметим, что графики уравнений с двумя переменными могут иметь самый разнообразный и даже необычный вид.

III. Контрольные вопросы

1. Определение уравнения с двумя переменными.
2. Что называют решением уравнения с двумя переменными?
3. Какие уравнения называют равносильными?
4. Как определить степень целого уравнения с двумя переменными?
5. Понятие о диафантовых уравнениях.
6. Формула для нахождения расстояния между точками A и B на координатной плоскости.
7. Уравнение окружности с центром в точке O'(a; b) и радиуса r.

IV. Задание на уроках

§ 5, № 1; 3 (а, б); 4 (г); 5 (а, б); 8 (г); 11 (б); 13 (а); 15 (а, б); 30 (а, в); 31 (а); 32 (б).

V. Задание на дом

§ 5, № 2; 3 (в, г); 4 (а); 5 (в, г); 8 (а); 11 (г); 13 (в); 15 (в, г); 30 (б, г); 31(б); 32(а).

VI. Творческие задания

1. Найдите целочисленные решения уравнения:

а) $x^2+7xy+6y^2=5$;

б) $x^2-3xy+2y^2=2$;

в) $xy+x+2y=1$;

г) $xy+2x-3y=7$;

д) $(2x+y)^2+18(x+y)^2=16$;

е) $(2x+y)^2+28(3x+y)^2=25$;

ж) $3(x-1)^2+4(y+2)^2=7$;

з) $2(x-3)^2+3(y-2)^2=5$.

Ответы: а) (–7; 4), (7; –4), (13; –4), (–13; 4); б) (0; –1), (0; 1), (3; 1), (–3; –1); в) (–1; 2), (–3; –4), (1; 0), (–5; –2); г) (4; –1), (2; –3); д) (4; –4), (–4; 4); е) (5; –15), (–5; 15); ж) (2; –1), (2; –3), (0; –1), (0; –3); з) (4; 3), (4; 1), (2; 3), (2; 1).

2. Постройте график уравнения:

а) $(x^2+y^2-1)(x-y)=0$;

б) $(x^2+y^2-4)(x+y)=0$;

в) $\dfrac{x^2+y^2-25}{x-4}=0$;

г) $\dfrac{25-x^2-y^2}{y+3}=0$;

д) $\dfrac{xy+4}{x+y}=0$;

е) $\dfrac{9-xy}{x-y}=0$;

ж) $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2-y^2}=0$;

з) $\dfrac{9-x^2-y^2}{x^2-y^2}=0$;

и) $\dfrac{2y-x}{(x-2)^2+(y-1)^2}=0$;

к) $\dfrac{y-x^2}{(x+2)^2+(y-4)^2}=0$.

3. Постройте график уравнения:

а) $x^2+4x=6y-y^2$;

б) $x^2+y^2+1=2x+4y$;

в) $y=\sqrt{4x-x^2}$;

г) $y = \sqrt{-6x - x^2}$;

д) $y + 1 = \sqrt{4x - x^2}$;

е) $y = \sqrt{6x - x^2} + 2$;

ж) $|y - 1| = \sqrt{4x - x^2}$.

VII. Подведение итогов уроков