Основные понятия (продолжение)

Цель: продолжить изучение основных понятий темы.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение решения уравнения с двумя переменными.

2. Постройте график уравнения:

а) $(xy-1)(x+1)=0$;

б) $(x-2)^2+(y+1)^2=4$;

в) $y-1=\sqrt{4x-x^2}$.

Вариант 2

1. Определение уравнения с двумя переменными.

2. Постройте график уравнения:

а) $(xy+1)(y-1)=0$;

б) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$;

в) $y+1=\sqrt{6x-x^2}$.

III. Изучение нового материала

4. Системы уравнений с двумя переменными

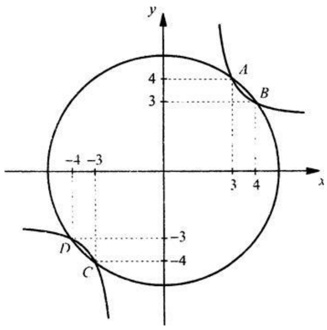
Уравнения p(x; y) = 0 и q(x; y) = 0 образуют систему уравнений, если возникает задача нахождения пары чисел (x; y), которые удовлетворяют каждому уравнению. При этом такая пара чисел (x; y) является *решением системы уравнений*. Уравнения, образующие систему, объединяются фигурной скобкой $\begin{cases} p(x;\, y)=0, \\ q(x;\, y)=0. \end{cases}$ Решить систему уравнений - это значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Одним из эффективных и наглядных способов решения и исследования уравнений и систем уравнений является *графический способ*.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$

Построим в одной системе координат графики первого $x^2 + y^2 = 25$ (окружность) и второго $xy = 12$ (гипербола) уравнений.

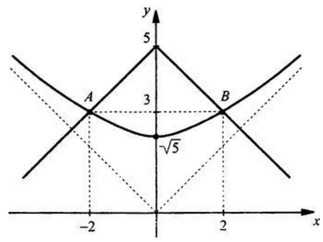


Видно, что графики уравнений пересекаются в четырех точках: A(3; 4), B(4; 3), C(-3; -4) и D(-4; -3), координаты которых являются решениями данной системы. Так как при графическом способе решения могут быть найдены с некоторой точностью, то их необходимо проверить подстановкой. Проверка показывает, что система действительно имеет четыре решения: (3; 4), (4; 3), (-3; -4), (-4; -3).

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} y=\sqrt{x^2+5}, \\ y+|x|=5. \end{cases}$

Построим в одной системе координат графики первого и второго уравнений. При x = 0 для первого уравнения находим $y = \sqrt{5}$. При больших значениях |x| имеем: $y=\sqrt{x^2+5}\approx\sqrt{x^2}=|x|$. После этого график первого уравнения легко построить.

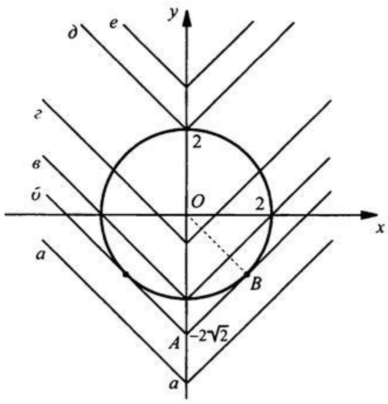


Второе уравнение запишем в виде y = 5 - |x|. Построение его графика также не вызывает груда. Графики пересекаются в двух точках: A(-2; 3) и B(2; 3). Проверкой убеждаемся, что система уравнений имеет два решения: (-2; 3) и (2; 3).

Пример 3

При всех значениях параметра a определим число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = |x| + a. \end{cases}$

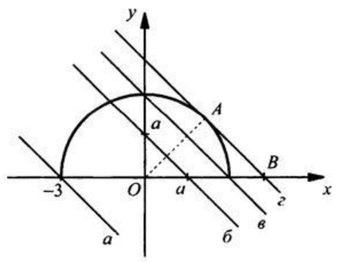
Построим график первого уравнения $x^2 + y^2 = 2^2$ (окружность) и второго уравнения y = |x| + a для различных значений параметра a. Этот график пересекает ось ординат в точке y = a. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB найдем гипотенузу OA = 2√2. Тогда сразу получаем ответ задачи: при $a \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$ система не имеет решений (графики а, е), при - $a \in \{-2\sqrt{2}\} \cup (-2; 2)$ имеет два решения (графики б, г), при a = -2 - три решения (график в) и при a = 2 - одно решение (график д).



Пример 4

При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2}, \\ y = a - x \end{cases}$ имеет единственное решение?

Построим график первого уравнения $y = \sqrt{9 - x^2}$ (верхняя полуокружность, так как y ≥ 0). Также в этой системе координат строим график второго уравнения y = a - x для различных значений параметра a (прямая). Эта прямая пересекает оси координат в точках x = a и y = a.



Очевидно, что система уравнений имеет единственное решение, если прямая y = a - x находится между положениями а и в, а также в случае касания г. Для этого случая из прямоугольного равнобедренного треугольника OAB найдем гипотенузу OB = 3√2 (соответственно, a = 3√2). Следовательно, при $a \in [-3; 3) \cup \{3\sqrt{2}\}$ система уравнений имеет единственное решение.

5. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными

Часто приходится изображать на координатной плоскости *множество решений неравенства* с двумя переменными. Напомним, что *решением неравенства* p(x; y) v 0 с двумя переменными x и y называют пару значений (x; y) этих переменных, которая обращает данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 5

Рассмотрим неравенство $3x^2 - \frac{1}{y} \le 8.$ Пара значений переменных (-1; 1) обращает это неравенство в верное числовое неравенство: $3 \cdot (-1)^2 - \frac{1}{1} \le 8$ или $2 \le 8$ - и является решением неравенства. Пара значений (2; 1) приводит к неверному числовому неравенству: $3 \cdot 2^2 - \frac{1}{1} \le 8$ или $11 \le 8$ - и не является решением данного неравенства.

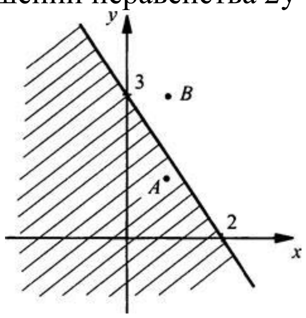
На примерах рассмотрим, как изображается множество решений неравенства с двумя переменными на координатной плоскости.

Пример 6

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $2y + 3x \le 6$.

Сначала построим прямую $2y + 3x = 6$ или $y = 3 - \frac{3}{2}x.$ Она разбивает множество всех точек координатной плоскости на точки, расположенные выше ее, и точки, расположенные ниже ее. Возьмем из каждой области по контрольной точке, например A(1; 1) и B(1; 3). Координаты точки A удовлетворяют данному неравенству: $2y + 3x \le 6$, т. е. $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \le 6$. Координаты точки B не удовлетворяют данному неравенству: $2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \le 6$.

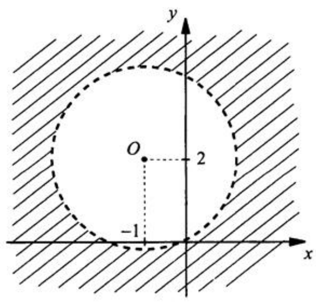
Так как данное неравенство может изменить знак на прямой $2y + 3x = 6$, то неравенству удовлетворяет множество точек той области, где расположена точка A. Заштрихуем эту область. Таким образом, изобразили множество решений неравенства $2y + 3x \le 6$.



Пример 7

Изобразим множество решений неравенства $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 > 0$ на координатной плоскости.

Построим сначала график уравнения $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$. Выделим в этом уравнении уравнение окружности: $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 4$ или $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$. Это уравнение окружности с центром в точке O(-1; 2) и радиуса R = 2. Построим эту окружность. Так как данное неравенство строгое и точки, лежащие на самой окружности, неравенству не удовлетворяют, то строим окружность пунктирной линией.

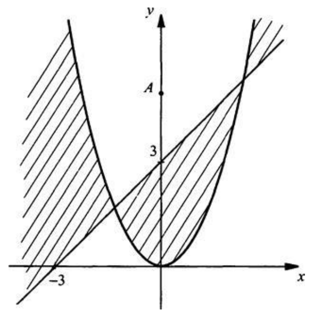


Легко проверить, что координаты центра O окружности данному неравенству не удовлетворяют. Выражение $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1$ меняет свой знак на построенной окружности. Тогда неравенству удовлетворяют точки, расположенные вне окружности. Эти точки заштрихованы.

Пример 8

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $(y - x^2)(y - x - 3) \le 0$.

Сначала построим график уравнения $(y - x^2)(y – x - 3) = 0$. Им являются парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 3$. Построим эти линии и отметим, что изменение знака выражения $(y - x^2)(y – x - 3)$ происходит только на этих линиях. Для точки A(0; 5) определим знак этого выражения: $(5 - 0^2)(5 - 0 - 3) > 0$ (т. е. данное неравенство не выполняется). Теперь легко отметить множество точек, для которых данное неравенство выполнено (эти области заштрихованы).



Как видно из рассмотренных примеров, для построения множества решений неравенства с двумя переменными используется *метод интервалов на координатной плоскости*.

В ряде случаев на координатной плоскости приходится изображать множество решений системы неравенств с двумя переменными. Напомним, что пара значений неизвестных, которая одновременно является решением и первого, и второго неравенств, называется решением системы двух неравенств с двумя переменными.

Пример 9

Рассмотрим систему неравенств с двумя переменными $\begin{cases} y \geq x^2 + 2, \\ x + y < 6. \end{cases}$

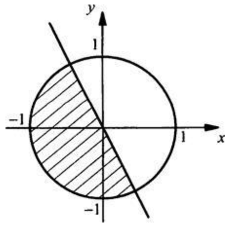
Пара значений переменных (1; 4) является решением системы неравенств, так как является решением каждого неравенства: $\begin{cases} 4 \geq 1^2 + 2, \\ 1 + 4 < 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4 \geq 3, \\ 5 < 6. \end{cases}$ Пара значений переменных (1; 1) не является решением системы неравенств, так как не является решением первого неравенства: $\begin{cases} 1 \geq 1^2 + 2, \\ 1 + 1 < 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 \geq 3, \\ 2 < 6. \end{cases}$

Множеством решений системы неравенств с двумя переменными является пересечение множеств решений всех неравенств, входящих в систему. На координатной плоскости множество решений системы неравенств изображается множеством точек, являющихся общей частью множеств, представляющих собой решения каждого неравенства системы.

Пример 10

Изобразим на координатной плоскости множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 2x + y \leq 0. \end{cases}$

Первое неравенство системы задает на координатной плоскости круг с центром в начале координат и радиуса, равного 1. Второе неравенство задает полуплоскость, расположенную ниже прямой $2x + y = 0$. Итак, решениями данной системы неравенств являются точки полукруга (они заштрихованы).

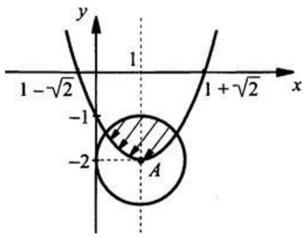


Пример 11

На плоскости xOy изобразим точки, удовлетворяющие системе $\begin{cases} y > x^2 - 2x - 1, \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 1. \end{cases}$

Изобразим сначала точки, удовлетворяющие первому неравенству. Сначала построим график границы - график функции $y = x^2 - 2x - 1$. Эта парабола пересекает ось Oy в точке $y = -1$, ось Ox - в точках $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Вершина параболы находится в точке (1; -2), ветви параболы направлены вверх. Эта кривая разбила координатную плоскость на две части: часть, заключенную между ветвями параболы, и часть, находящуюся за ветвями параболы. Взяв любую точку (например, (1; -1)) из первой части плоскости, видим, что она удовлетворяет неравенству $y \geq x^2 - 2x - 1$. Поэтому все точки этой части также удовлетворяют неравенству (за исключением границы, так как неравенство строгое).

Аналогично, построив границу $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$, видим, что неравенству $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 1$ удовлетворяют внутренние и граничные точки окружности.

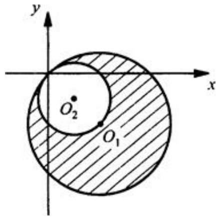


Штриховкой показаны те точки, которые удовлетворяют системе неравенству. Причем стрелки показывают, что данная граница (часть параболы) не входит в множество решений системы неравенств.

Пример 12

Изобразим множество точек, которые являются решениями системы неравенств $\begin{cases} x^2-8x+y^2+8y\le 0, \\ x^2-4x+y^2+4y\ge 0, \end{cases}$ и вычислим площадь этой фигуры.

Запишем систему неравенств в виде $\begin{cases} (x^2-8x+16)+(y^2+8y+16)\le 32, \\ (x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)\ge 8 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x-4)^2+(y+4)^2\le (4\sqrt{2})^2, \\ (x-2)^2+(y+2)^2\ge (2\sqrt{2})^2. \end{cases}$



Графиком первого неравенства является круг с центром в точке $O_1(4; -4)$ и радиуса $R_1 = 4\sqrt{2}$. Графиком второго неравенства являются точки, расположенные за окружностью с центром в точке $O_2(2; -2)$ и радиуса $R_2 = 2\sqrt{2}$. Итак, решениями данной системы неравенств являются точки, расположенные между двумя касающимися в начале системы координат окружностями (эти точки заштрихованы).

Найдем площадь этой фигуры. Она равна разности площадей окружностей: $S=\pi R_1^2-\pi R_2^2=\pi(4\sqrt{2})^2-\pi(2\sqrt{2})^2=32\pi-8\pi=24\pi.$ Таким образом, площадь заштрихованной фигуры равно в 3 раза больше площади малого круга.

IV. Задание на уроках

§ 5, № 18 (а, б); 19 (в, г); 20 (а, в); 21 (а, б); 34 (г); 35 (в); 39 (а).

V. Задание на дом

§ 5, № 18 (в, г); 19 (а, б); 20 (б, г); 21 (в, г); 34 (б); 35 (г); 39 (б).

VI. Творческие задания

1. Найдите значения параметра а, при которых система уравнений имеет ровно два решения:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ |x|+y=a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ xy=a-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответы: а) $(-1; 1)\cup\{\sqrt{2}\}$; б) $\dfrac{1}{4}$.

2. Найдите значения параметра а, при которых система уравнений имеет ровно три решения:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=2y, \\ y=|x-a|; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=a. \end{cases}$

Ответы: а) $-1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$; 0; б) $\sqrt{2}$.

3. Для каждого значения параметра а определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a. \end{cases}$

Ответы: а) при $a \in (-\infty; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ нет решений, при а ∈ {1; √2} четыре решения, при а ∈ (1; √2) восемь решений; б) при $|a| \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; \infty)$ нет решений, при $|a| \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right\}$ четыре решения, при $|a| \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ восемь решений.

4. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $(x-1)(y+2) \le 0$;
б) $(2x+3)(3y-2) \ge 0$;
в) $(y-x^2)(y-2) > 0$;
г) $(y+x^2)(y+3) < 0$;
д) $(x^2-4)(y+1) \le 0$;
е) $(y^2-1)(x+2) \ge 0$;
ж) $(x^2+y^2-4)(x+1) > 0$;
з) $(x^2+y^2-9)(y-2) < 0$;
и) $\dfrac{(x-1)^2+(y+2)^2-4}{x-1} \le 0$;
к) $\dfrac{(x+2)^2+(y-4)^2-9}{y-4} \ge 0$.

VII. Подведение итогов уроков