Основные понятия и свойства неравенств

Цель: рассмотреть основные понятия, связанные с неравенствами.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Частично этот материал изучался в конце 8 класса. Теперь необходимо его упорядочить и систематизировать.

Рассмотрим неравенство $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ - функция, зависящая от переменной x, $\vee$ - знак сравнения (может совпадать с одним из четырех знаков: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$). Решением этого неравенства (или частным решением) называют такое значение переменной x, которое обращает неравенство $f(x) \vee 0$ в верное числовое неравенство. Множество всех частных решений неравенства называют общим решением (или решением) неравенства.

Пример 1

Числа 3; 1,6; $\sqrt{5}$; π - частные решения неравенства $2x - 3 \geq 0$ (в этом легко убедиться подстановкой таких решений в данное неравенство). Числа x, удовлетворяющие условию $x \geq 1,5$, являются общим решением приведенного неравенства.

Применяются различные формы записи неравенств. В частности, используя перенос в другую часть неравенства его членов (с изменением их знаков на противоположные), мы имеем право записать общий вид неравенства в форме $f(x) \vee g(x)$ (хотя, на наш взгляд, переход от одной формы записи неравенства к другой в учебнике не оправдан).

Два неравенства $f(x) \vee g(x)$ и $r(x) \vee s(x)$ называют равносильными, если они имеют одинаковые решения или решений не имеют. Можно дать и другое определение: два неравенства равносильны, если любое частное решение первого неравенства является частным решением второго и, наоборот, любое частное решение второго неравенства является частным решением первого.

Пример 2

а) Неравенства $(2x^2 + 1)(2x - 3) \geq 0$ и $2x \geq 3$ равносильны, так как имеют одинаковые решения: $x \geq 1,5$.

б) Неравенства $2x^2 + 1 < 0$ и $3|x| + 2 < 0$ равносильны, так как каждое из них не имеет решений.

в) Неравенства $2x - 3 \geq 0$ и $(2x - 3)(4x - 20) \leq 0$ неравносильны, так как решение первого неравенства $x \geq 1,5$, второго неравенства - $1,5 \leq x \leq 5$. Таким образом, решения второго неравенства составляют только часть решений первого неравенства.

При решении неравенства его заменяют более простым равносильным неравенством. Такую замену называют *равносильным преобразованием неравенства*. Для этих преобразований используются три правила.

Правило 1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не меняя при этом знак неравенства.

Пример 3

Неравенство $3x + 4 < x^2$ равносильно неравенству $0 < x^2 - 3x - 4$, так как члены $3x$ и 4 перенесены в правую часть с противоположным знаком, а знак неравенства оставили неизменным.

Правило 2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не меняя при этом знак неравенства.

Пример 4

Неравенство $16x + 8 \geq 20x^2$ равносильно неравенству $4x + 2 \geq 5x^2$: обе части неравенства разделили на положительное число 4, а знак неравенства сохранили.

Правило 3. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Пример 5

Неравенство $-3x^2 + 5x + 1 \geq 0$ равносильно неравенству $3x^2 - 5x - 1 \leq 0$, так как обе части первого неравенства умножили на отрицательное число (-1) и изменили знак неравенства на противоположный.

Правила 2 и 3 можно и нужно обобщить.

*Правило 2**. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное при всех значениях x, и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.

Пример 6

Неравенство $\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0$ равносильно неравенству $2x - 3 \geq 0$, так как обе части первого неравенства умножили на выражение $p(x)=\sqrt{x^2+1}$, положительное при всех значениях x, и сохранили знак неравенства.

*Правило 3**. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение p(x), отрицательное при всех значениях x, и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Пример 7

Неравенство $(-x^4 - 1)(2x - 3) \geq 0$ равносильно неравенству $2x - 3 \leq 0$, так как обе части первого неравенства разделили на выражение $p(x) = -x^4 - 1 = -(x^4 +1)$, отрицательное при всех значениях x, и изменили знак неравенства на противоположный.

Заметим, что формулировки правил 2* и 3* очень важны: только при соблюдении их условий получаются равносильные неравенства.

Пример 8

Неравенство $\frac{2x-3}{x^2-1} \geq 0,$ разумеется, неравносильно неравенству $2x - 3 \geq 0$, так как выражение $p(x) = x^2 - 1$ в зависимости от x может иметь и положительный, и отрицательный знак. Поэтому просто умножить обе части данного неравенства на выражение $p(x) = x^2 - 1$ нельзя. Исходное неравенство равносильно двум системам неравенств $\begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ x^2-1>0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-3<0, \\ x^2-1<0. \end{cases}$ Проще всего решить данное неравенство, разумеется, методом интервалов (который будет изложен позже).

III. Контрольные вопросы

1. Частное и общее решения неравенства.
2. Понятие равносильных неравенств.
3. Равносильные преобразования неравенств.
4. Три правила равносильных преобразований неравенств (фронтальный опрос).

IV. Задания на уроке и дома

1. Является ли данное число a решением неравенства?

а) $3x-2 \geq 4;\ a=-2,\ a=1, a=2, a=\pi, a=5;$

б) $3-4x>-11;\ a=-3, a=2, a=\pi, a=4, a=6;$

в) $|2x-1| \geq 3;\ a=-2, a=-1, a=0, a=2, a=4;$

г) $|2-3x|<4;\ a=-\sqrt{3},\ a=1, a=2, a=\pi, a=4;$

д) $3x^2 \geq 4-4x;\ a=-3,\ a=-\sqrt{2},\ a=-1, a=1,\ a=\frac{\pi}{2};$

е) $2x^2+5x-3<0;\ a=-4,\ a=-\sqrt{5},\ a=-1, a=2, a=\pi.$

2. Являются ли данные неравенства равносильными и объясните почему:

а) $3x^2 \geq 2x+1$ и $3x^2-4x \geq 1-2x;$

б) $2x^2-3x \geq 1$ и $2x^2+3x>6x+1;$

в) $(|x|+1)(3-2x) \geq 0$ и $3-2x \geq 0;$

г) $(-2x^2-3)(5+2x) \leq 0$ и $5+2x \geq 0;$

д) $\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+2}}>0$ и $4x-5>0;$

е) $-\sqrt{x^4+1}(3x+2) \leq 0$ и $3x+2 \geq 0;$

ж) $\frac{2x^2-3}{2x+5}<0$ и $2x^2-3<0;$

з) $\frac{x^2}{x+3}-2 \geq 0$ и $\frac{x^2-2x-6}{x+3} \geq 0.$

V. Подведение итогов урока