# Простейшие вероятностные задачи

*Цель*: рассмотреть простейшие понятия теории вероятностей.

*Ход уроков*

*I. Сообщение темы и цели уроков*

*II. Повторение и закрепление пройденного материала*

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

*Вариант 1*

1. Определение среднего арифметического.

2. Приведен рост (в сантиметрах) пяти человек: 163, 183, 172, 180, 172. Найдите среднее, моду, медиану.

*Вариант 2*

1. Определение моды измерений.

2. Приведен рост (в сантиметрах) пяти человек: 187, 162, 171, 162, 183. Найдите: среднее, моду, медиану.

*III. Изучение нового материала*

В классической математике работают с реальной моделью ситуации (например, встреча двух пешеходов), которая *однозначно описывается* с помощью математического аппарата. В жизни мы постоянно сталкиваемся с тем, что некоторое событие может произойти, а может и не произойти (например, не оговоренная заранее встреча двух друзей в кафе). Такие непредсказуемые события называют *случайными*. *Теория вероятностей* изучает различные модели случайных событий, их свойства и характеристики. Разумеется, эта теория не может однозначно предсказать, какое событие в реальности произойдет, но может оценить, какое событие наиболее вероятно. Естественно, как и во всей остальной математике, выбранная модель *идеализирована* (например, смеси веществ считаются идеально перемешанными, изменение скорости тела происходит мгновенно и т. д.). Поэтому, как мы наблюдаем в жизни, почти небывалое событие происходит, а ожидаемое - нет.

Теперь разберемся с *основными понятиями* теории вероятностей. При этом будем считать, что случайные события *равновероятны* (или *равновозможны*), - идеализированная модель.

*Классическое определение вероятности*. Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Для решения задач используют *алгоритм нахождения вероятности случайного события*. Необходимо определить:

1) число N всех равновозможных исходов данного испытания;

2) количество N(A) исходов, в которых наступает событие А;

3) частное $\frac{N(A)}{N}$ равняется вероятности события А, которое обозначают символом P(A), т. е. $P(A) = \frac{N(A)}{N}$.

*Пример 1*

Найдем вероятность того, что при одном бросании игральной кости (кубика) выпадет: а) три очка; б) число очков, кратное трем; в) число очков больше трех; г) число очков, некратное трем.

Всего имеется N = 6 возможных исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Считаем, что эти исходы равновозможны.

а) Только при одном из исходов N(A) = 1 происходит интересующее нас событие A - выпадение трех очков. Вероятность этого события $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{1}{6}.$

б) При двух исходах N(B) = 2 происходит событие B: выпадение числа очков, кратных трем: выпадение или трех, или шести очков. Вероятность такого события $P(B)=\frac{N(B)}{N}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$

в) При трех исходах N(C) = 3 происходит событие C: выпадение числа очков больше трех: выпадение 4, 5 или 6 очков. Вероятность этого события $P(C)=\frac{N(C)}{N}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

г) Из шести возможных выпавших чисел четыре (1, 2, 4 и 5) некратны трем, а остальные два (3 и 6) делятся на три. Значит, интересующее нас событие D наступает в четырех случаях, т. е. N(D) = 4. Вероятность такого события $P(D)=\frac{N(D)}{N}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

*Пример 2*

Найдем вероятность того, что при вытаскивании одной карты из колоды (52 карты) эта карта окажется: а) дамой пик; б) дамой любой масти; в) картой пиковой масти; г) картой черной масти.

Всего имеется N = 52 возможных исхода. Считаем, что эти исходы равновероятны.

а) Очевидно, что в колоде только одна дама пик. Поэтому только при одном из исходов N(A) = 1 происходит интересующее нас событие A - выпадение дамы пик. Вероятность этого события $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{1}{52}.$

б) Также в колоде имеются карты четырех мастей, в том числе четыре дамы. Поэтому при четырех исходах N(B) = 4 происходит нужное нам событие B - выпадение любой дамы. Вероятность такого события $P(B)=\frac{N(B)}{N}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}.$

в) В колоде имеется по 13 карт каждой масти, в том числе и пиковой. Поэтому число интересующих нас исходов N(C) = 13 - выпадение карты пиковой масти. Вероятность этого события $P(C)=\frac{N(C)}{N}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}.$

г) В колоде имеется 26 карт черной масти и 26 карт красной масти. Число интересующих нас исходов N(D) = 26 - выпадение карты черной масти. Вероятность такого события $P(D)=\frac{N(D)}{N}=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}.$

Событие, которое происходит всегда, называют *достоверным событием*. Например, событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадет натуральное число очков. *Вероятность достоверного события равна 1*. Событие, которое не может произойти, называют *невозможным*, например выпадение 9 очков на игральной кости. *Вероятность невозможного события равна 0*. Таким образом, вероятность P(A) некоторого события $0 \le P(A) \le 1$.

При решении некоторых задач удобно использовать *свойство вероятностей противоположных событий*. События A и B называют противоположными, если всякое наступление события A означает ненаступление события B, а ненаступление события A - наступление события B. Событие, противоположное событию A, обозначают символом $\bar{A}$. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т. е. $P(A)+P(\bar{A})=1$.

*Пример 3*

Пусть бросают игральную кость. Обозначим события: А - выпадения четного числа очков, В - выпадение нечетного числа очков. Очевидно, что А и В - противоположные события, т. е. $B=\bar{A}$. При этом $P(A)+P(\bar{A})=1$.

*Пример 4*

Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 10?

Общее число равновозможных исходов этого испытания равно 36. Пусть событие А означает, что сумма выпавших на двух кубиках очков меньше 10. Так как благоприятным для события А является большое число исходов, то удобно сначала найти вероятность противоположного ему события $\bar{A}$, которое означает, что сумма выпавших очков больше или равна 10. Благоприятными для события $\bar{A}$ являются: 6 + 4; 6 + 5; 6 + 6; 5 + 6; 4 + 6. Поэтому вероятность $P(\bar{A})=\frac{5}{36}$ и $P(A)=1-P(\bar{A})=\frac{31}{36}$.

Отметим основное правило, используемое в теории вероятностей: *правило сложения вероятностей*.

Два события называют *несовместными*, если в одном и том же испытании они не могут произойти одновременно, т. е. наступление одного из них исключает наступление другого.

*Пример 5*

Пусть в мешке находятся 15 шаров: 7 белых, 5 красных и 3 зеленых. Из мешка наугад вынимают один шар.

Рассмотрим следующие события: событие А - шар оказался красным; событие В - шар оказался зеленым (очевидно, что события А и В несовместны); событие С - шар оказался не белым (красным или зеленым). Выясним, как вероятность события С связана с вероятностями каждого из событий А и В.

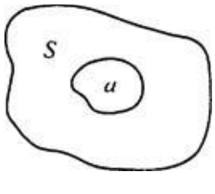
Найдем вероятности событий А, В, С. Для каждого испытания (извлечение из мешка одного шара) равновозможными являются 15 исходов. Из них для события А благоприятны 5 исходов, для события В - 3 исхода, для события С - 8 исходов. Находим вероятности этих событий: $P(A)=\frac{5}{15}, P(B)=\frac{3}{15}, P(C)=\frac{8}{15}$. Видно, что P(C) = P(A) + P(B).

Имеем *правило сложения* вероятностей: если событие С означает, что наступает одно из двух несовместных событий А или В, то вероятность события С равна сумме вероятностей событий А и В.

Во многих случаях количество всех исходов и интересующих нас исходов бесконечно. Поэтому понятие классической вероятности использовать невозможно.

Вероятность случайного события иногда можно найти, используя геометрические соображения (*геометрическая вероятность*).

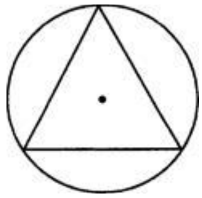
Предположим, что точку бросают в фигуру площади S. Пусть эта фигура содержит фигуру площади a. Будем считать вероятностью P попадания точки в меньшую фигуру отношение a/S, т. е. P = a/S.



*Пример 6*

В окружность вписан правильный треугольник. Найдем вероятность того, что точка, брошенная в круг, попадет в треугольник.

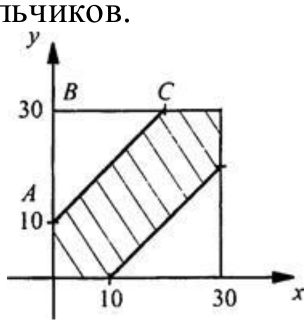
Пусть радиус окружности равен R, а сторона треугольника равна c. Свяжем между собой эти переменные. Используем теорему синусов: $\frac{c}{\sin 60°} = 2R,$ откуда $c = 2R\sin 60° = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$ Найдем площадь треугольника: $a = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$ Найдем вероятность попадания точки в треугольник: $P = \frac{a}{S} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} : \pi R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,41.$



*Пример 7*

Коля и Миша договорились встретиться в условленном месте с 10 ч до 10 ч 30 мин, причем каждый пришедший ждет другого 10 мин, после чего уходит. Найдем вероятность того, что встреча состоится, если каждый выбирает момент своего прихода наудачу в указанном интервале.

Пусть x - момент прихода на место встречи Коли, y - момент прихода Миши. Так как время ожидания составляет 10 мин, то для встречи необходимо выполнение неравенства $|y - x| \le 10$, или $-10 \le y - x \le 10$, или $x - 10 \le y \le x + 10$. На координатной плоскости построим квадрат со стороной 30. Каждая точка этого квадрата соответствует времени прихода мальчиков.




Построим также множество точек, удовлетворяющих неравенству $x - 10 \le y \le x + 10$ (эта область заштрихована). Тогда вероятность встречи мальчиков равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади квадрата. Площадь квадрата равна $30^2 = 900$. Найдем площадь треугольника ABC и получим: $\frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 20^2 = 200.$ Тогда площадь заштрихованной фигуры: $900 - 2 \cdot 200 = 500$. Вероятность встречи мальчиков $\frac{500}{900} = \frac{5}{9}.$

*IV. Контрольные вопросы*

1. Понятие вероятности события.
2. Какие события называют несовместными?
3. Правило сложения вероятностей.
4. Свойство вероятностей противоположных событий.
5. Понятие о геометрической вероятности.

*V. Задание на уроках*

§ 20, № 1; 3; 6; 9; 11 (а, б); 12 (а, в); 15; 18; 21 (а, б); 22 (а, г).

*VI. Задание на дом*

§ 20, № 2; 5; 7; 10; 11 (в, г); 12(б, г); 16; 19; 21 (в, г); 22 (б, в).

*VII. Подведение итогов уроков*