Рациональные неравенства

Цель: рассмотреть метод интервалов для решения неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Решите неравенство $6x^2 - 13x + 6 \le 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$; г) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

2. Решите неравенство $-25x^2 + 20x - 4 \ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty; 0{,}4]$; б) $[0{,}4; +\infty)$; в) $\varnothing$; г) 0,4.

3. Решите неравенство $x^2 - 3|x| + 2 \ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$; б) $[1; 2]$; в) $[2; +\infty)$; г) $[-1; 1]$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $15x^2 – 34x + 15 \ge 0$.

а) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right]$; б) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right]$.

2. Решите неравенство $9x^2 - 12x + 4 \le 0$.

Ответы: а) $\frac{2}{3}$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; в) $\varnothing$; г) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

3. Решите неравенство $x^2 - 5|x| + 6 \ge 0$.

Ответы: а) $(-\infty; -3]$; б) $[-2; 2]$; в) $[3; +\infty)$; г) $(-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; +\infty)$.

III. Изучение нового материала

Рациональным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида h(x) v g(x), где h(x) и g(x) - рациональные выражения (функции). Напомним, что рациональное выражение - алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменной x с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень.

Пример 1

а) Выражения $3x^2+5, \frac{7y^4-5}{2y+3}, \frac{8z^5+3z^4-2}{z}$ рациональные (по определению).

б) Выражения $\sqrt{x+3}, \frac{\sqrt{y}}{y+2}, \frac{\sqrt{3z^2+1}}{\sqrt{z}-2}$ нерациональные, так как содержат операцию извлечения квадратного корня.

Решение рациональных неравенств происходит по стандартной схеме.

1) С помощью правил равносильных преобразований неравенство h(x) v g(x) записывают в виде f(x) v 0, где f(x) – алгебраическая дробь (в частности, f(x) может быть и многочленом).

2) Находим корни числителя и знаменателя дроби f(x) (или раскладываем на множители числитель и знаменатель дроби f(x)).

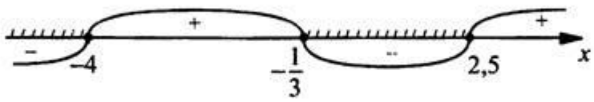
3) Используют метод интервалов.

На предыдущем уроке метод интервалов был использован для решения квадратных неравенств. Теперь необходимо рассмотреть применение этого метода для решения более сложных неравенств, в первую очередь рациональных неравенств. Чтобы понять особенности использования метода интервалов, приведем ряд примеров. Сначала рассмотрим решение неравенств высоких степеней.

Пример 2

Решим неравенство $(2x - 5)(x + 4)(3x +1) \le 0$.

Данное неравенство уже записано в виде f(x) v 0, и выражение f(x) уже разложено на множители (т. е. пункты 1 и 2 уже выполнены условием задачи). Осталось применить метод интервалов. Найдем корни выражения $f(x) = (2x - 5)(x + 4)(3x + 1)$. Ими являются числа $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1/3$. Очевидно, что знак выражения f(x) может измениться только в этих точках. Отметим числа x_1, x_2 и x_3 на координатной прямой. Они разбили числовую ось на четыре промежутка, на каждом из которых выражение f(x) сохраняет постоянный знак. Определим знак выражения f(x) в любой точке (кроме трех отмеченных).



Например, при x = 5 каждый из трех множителей выражения f(x) положительный. Поэтому и все выражения f(x) > 0. Строим диаграмму знаков выражения fix) и выписываем решение данного неравенства: x ∈ (-∞; - 4]U[-1/3; 2,5].

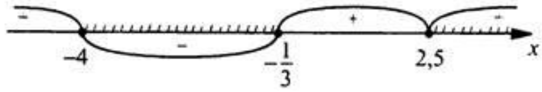
Слегка изменим условие задачи.

Пример 3

Решим неравенство $(2x - 5)^2$ (x + 4)(3x + 1) ≤ 0.

Отличие от предыдущего примера состоит в первом множителе: $(2x - 5)^2$ вместо (2x - 5). Однако эго приводит к совершенно другому ответу.

В данном примере в точке x = 2,5 знак выражения f(x) не меняется. Действительно, при всех значениях x (кроме x = 2,5) выражение $(2x - 5)^2 > 0$. Поэтому знак f(x) меняется только в точках x_1 = -4 и x_2 = -1/3. В соответствии с этим диаграмма знаков выражения f(x) имеет другой вид.



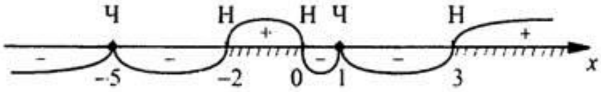
Учитывая, что данное неравенство нестрогое, то его решением являются числовой промежуток и отдельная точка: x ∈ [-4; -1/3]U{2,5}. Если сравнить этот ответ с ответом предыдущей задачи, то видны существенные и принципиальные различия. Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 4

Решим неравенство $(x+5)^8(x+2)^3x(x-1)^2(x-3)^7 \geq 0.$

Прежде всего отметим, что если в разложение многочлена на множители входит сомножитель $(x - x_0)^k$, то говорят, что x_0 - корень многочлена кратности k. Для решения неравенства важно знать, является ли k четным или нечетным числом, так как при k четном многочлен справа и слева от x_0 имеет один и тот же знак (т. е. знак многочлена не меняется), а при k нечетном многочлен справа и слева от x_0 имеет противоположные знаки (т. е. знак многочлена изменяется).

Вернувшись к данному неравенству, отметим, что многочлен имеет корни x_1 = -5 (кратности 8 - четная кратность), x_2 = -2 (кратности 3 - нечетная), x_3 = 0 (кратности 1 - нечетная), x_4 = 1 (кратности 2 - четная), x_5 = 3 (кратности 7 - нечетная). Нанесем эти корни на числовую ось и буквами Н и Ч отметим четность кратности этих корней.



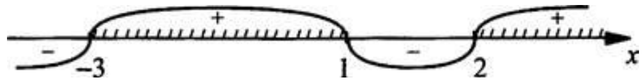
Определим знак многочлена, стоящего в левой части неравенства при любом x, не совпадающем с корнями (например, при x = -3 многочлен отрицательный). Рассмотрим теперь знаки многочлена, двигаясь в положительном направлении оси 0x. Так как x = -2 - корень нечетной кратности, то при этом значении x происходит изменение знака многочлена на противоположный и многочлен на промежутке (-2; 0) положительный. При x = 0 (корень нечетной кратности) опять происходит изменение знака многочлена и он на промежутке (0; 1) становится отрицательным. Так как x = 1 - корень четной кратности, то многочлен знак не меняет и на промежутке (1; 3) он по-прежнему отрицательный. Рассуждая подобным образом, нетрудно получить полную диаграмму знаков многочлена на всей числовой оси, приведенную на рисунке. После этого легко ответить на вопрос задачи: при каких x знак многочлена неотрицательный? Из рисунка видно, что такими x являются x ∈ {-5}U[-2; 0]U{1}U[3; +∞).

Разумеется, в тех случаях, когда неравенство не имеет вида, приведенного в примере 4, то неравенство необходимо, используя те или иные приемы, привести к указанному виду.

Пример 5

Решим неравенство $x^3 + 6 > 7x$.

Запишем неравенство в виде $x^3 - 7x + 6 > 0$ и разложим многочлен в левой части на множители. Для этого член -7x представим как сумму двух слагаемых: -6x и -x и сгруппируем члены многочлена: $(x^3 - x) + (6 - 6x) > 0$, или $x(x^2 - 1) - 6(x - 1) > 0$, или x(x – 1)(x + 1) - 6(x - 1) > 0, или $(x – 1)(x^2 + x - 6) > 0$. Разложение $x^2 + x - 6$ на множители проводим стандартным путем, зная его корни (x = -3, x = 2), и окончательно получаем: (x - 1)(x + 3)(x - 2) > 0. Все корни этого многочлена первой кратности, и дальнейшее решение не вызывает трудностей. Построив диаграмму знаков многочлена, найдем x ∈ (-3; 1) U (2; +∞).



Остановимся теперь на решении рациональных неравенств методом интервалов.

Рациональные неравенства легко сводятся к решению неравенств высоких степеней. Действительно, после преобразований левая часть рационального неравенства может быть представлена в виде отношения многочленов P(x) и Q(x), т. е. $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$. Умножим обе части такого неравенства на многочлен $[Q(x)]^2$, который положителен при всех допустимых значениях x (так как $Q(x) \neq 0$). Тогда знак неравенства не меняется и получаем неравенство $P(x) \cdot Q(x) \vee 0$, равносильное данному. То есть исходное неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \vee 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{cases}$ которая далее решается методом интервалов.

Пример 6

Решим неравенство $\frac{(x^2+1)(x^2-2x-3)}{(5x-x^2)(x+2)} \geq 0.$

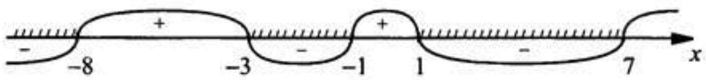
Отметим прежде всего, что $(5x - x^2)(x + 2) \neq 0$ или $x(5 - x)(x + 2) \neq 0$, т. е. $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq 5$ (ОДЗ неравенства). Сведем данное *рациональное неравенство к алгебраическому* (аналогичному примеру 1). Для этого умножим обе части неравенства на положительное выражение - квадрат знаменателя $(5x - x^2)^2(x + 2)^2$. При этом знак неравенства не меняется и получаем: $(x^2 + 1)(x^2 - 2x - 3)(5x - x^2)(x + 2) \geq 0$. Разложив квадратные трехчлены на множители, имеем: $(x^2 + 1)(x - 3)(x + 1)x(5 - x)(x + 2) \geq 0$. Решим это неравенство методом интервалов, учитывая, что все корни многочлена имеют первую кратность: $x \in (-\infty; -2]U[-1; 0]U[3; 5]$.

Теперь учтем ОДЗ исходного неравенства и окончательно найдем: $x \in (-\infty; -2)U[-1; 0)U[3; 5)$.

Пример 7

Решим неравенство $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \frac{1}{x+3}.$

Чтобы свести пример к аналогичному предыдущему примеру, перенесем все члены неравенства в его левую часть: $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} - \frac{1}{x+3} \leq 0.$ Приведя дроби к общему знаменателю, получим: $\frac{x^2+7x-8}{(x-7)(x+1)(x+3)} \leq 0,$ т. е. неравенство предыдущего типа. Решая его аналогично, найдем: $x \in (-\infty; -8]U(-3; -1)U[1; 7)$.

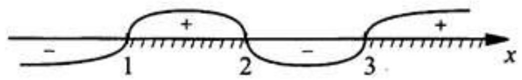


Для диаграммы знаков учтены корни числителя $x^2 + 1x - 8$ ($x = 8$ и $x = 1$), первая кратность всех корней и ограничения на x ($x \neq -3$, $x \neq -1$, $x \neq 7$).

Пример 8

Решим неравенство $\frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2-3x+1}{x-3} \geq 2x.$

ОДЗ неравенства определяется условиями: $x - 1 \neq 0$, $x - 3 \neq 0$ (т. е. $x \neq 1$, $x \neq 3$). Почленно разделим дроби в левой части неравенства на знаменатели, сгруппировав слагаемые в числителях дробей: $\frac{(x^2-x)+1}{x-1} + \frac{(x^2-3x)+1}{x-3} \geq 2x,$ или $\frac{x(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} + \frac{x(x-3)}{x-3} + \frac{1}{x-3} \geq 2x,$ или $x + \frac{1}{x-1} + x + \frac{1}{x-3} \geq 2x,$ или $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \geq 0.$ Приводим дроби к общему знаменателю и получаем: $\frac{2x-4}{(x-1)(x-3)} \geq 0.$ Далее решаем это неравенство по обычной схеме и находим: $x \in (1; 2]U(3; +\infty)$.



При наличии в рациональных неравенствах знаков модуля их надо раскрыть.

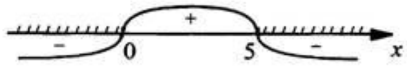
Пример 9

Решим неравенство $|5 - x|(x - 1) + 5 < x$.

Решим неравенство аналитически и графически.

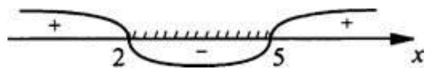
а) Перенесем все члены неравенства в левую часть: $|5 - x|(x - 1) + 5 - x < 0$ - и раскроем знак модуля.

Если $5 - x \geq 0$ (т. е. $x \leq 5$), то получаем неравенство $(5 - x)(x - 1) + (5 - x) < 0$, или $(5 - x)(x - 1 + 1) < 0$, или $(5 - x)x < 0$. Решим это неравенство методом интервалов.



Наносим корни соответствующего уравнения: $x_1 = 0$ и $x_2 = 5$. Определяем знак выражения $(5 - x)x$, например, для $x = 2$: $(5 - 2) \cdot 2 = 6 > 0$. После этого рисуем диаграмму знаков. Решением неравенства являются $x \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$. Так как рассматривается область $x \leq 5$, то решением является промежуток $x \in (-\infty; 0)$.

Если $5 - x < 0$ (т. е. $x > 5$), то имеем неравенство $-(5 - x)(x - 1) + (5 - x) < 0$, или $(5 - x)(-x + 1 + 1) < 0$, или $(5 - x)(2 - x) < 0$. На числовой оси отмечаем корни соответствующего уравнения: $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. Находим знак выражения $(5 - x)(2 - x)$, например, при $x = 3$: $(5 - 3)(2 - 3) = -2 < 0$ - и рисуем диаграмму знаков.

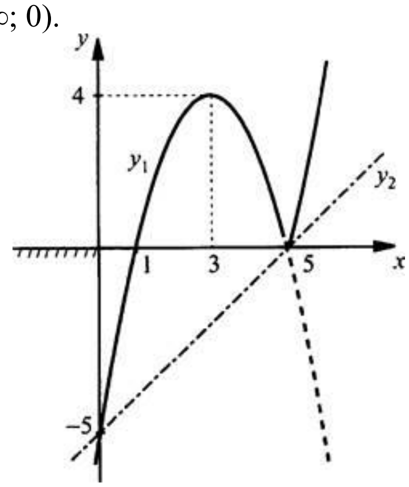


Решением неравенства будет интервал $x \in (2; 5)$. Так как рассматривается область $x > 5$, то этот промежуток решением данного неравенства не является.

Итак, решение неравенства $x \in (-\infty; 0)$.

б) Запишем данное неравенство в виде $|5 - x|(x - 1) < x - 5$. Построим график функции $y_1 = |5 - x|(x - 1)$. Для этого раскроем знак модуля. При $x \leq 5$ получаем: $y_1 = (5 - x)(x - 1)$. В этой области построим график такой функции. Для $x > 5$ имеем: $y_1 = -(5 - x)(x - 1)$. Видно, что эта функция отличается от предыдущей только знаком «минус». Поэтому этот график легко получить из предыдущего, если отразить пунктирную часть параболы относительно оси абсцисс зеркально вверх.

Построим также график функции $y_2 = x - 5$. Теперь необходимо определить, при каких значениях x значение функции y_2 больше значений функции y_1 (т. е. графику находится выше y_1). Из рисунка видно, что это происходит при $x \in (-\infty; 0)$.

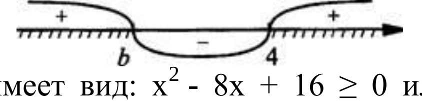


Пример 10

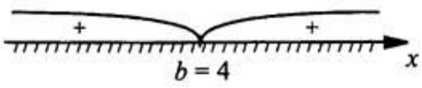
Решим неравенство $x^2 - (b + 4)x + 4b \geq 0$.

Найдем дискриминант соответствующего уравнения: $D = (b+4)^2 - 4 \cdot 4b = b^2 + 8b + 16 - 16b = b^2 - 8b + 16 = (b-4)^2$. Теперь легко определить и корни: $x_{1,2} = \frac{b + 4 \pm (b - 4)}{2}$ или $x_1 = b$ и $x_2 = 4$. Параметр b может быть меньше числа 4, совпасть с ним или оказаться больше числа 4. Рассмотрим эти случаи.

а) Если $b < 4$, то диаграмма знаков изображена на рисунке. Неравенству удовлетворяют промежутки, расположенные за корнями, $x \in (-\infty; b] \cup [4; +\infty)$.



б) Если $b = 4$, то неравенство имеет вид: $x^2 - 8x + 16 \geq 0$ или $(x - 4)^2 \geq 0$. Это неравенство выполнено при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

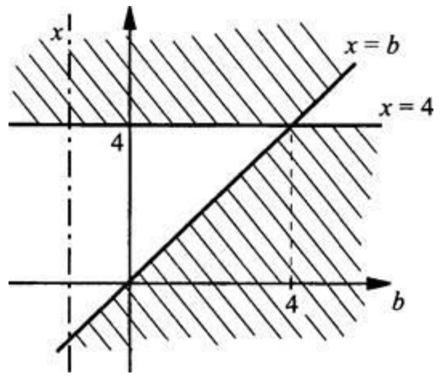


в) Если $b > 4$, то неравенству удовлетворяют интервалы, расположенные за корнями, т. е. $x \in (-\infty; 4] \cup [b; +\infty)$.

Итак, получаем ответ: для $b \in (-\infty; 4)$ $x \in (-\infty; b] \cup [4; +\infty)$; для $b = 4$ $x \in (-\infty; +\infty)$; для $b \in (4; +\infty)$ $x \in (-\infty; 4] \cup [b; +\infty)$.

Заметим, что эти три случая можно объединить, если использовать метод интервалов на координатной плоскости (а не на координатной прямой, как ранее). Особенно такой подход удобен при решении сложных задач.

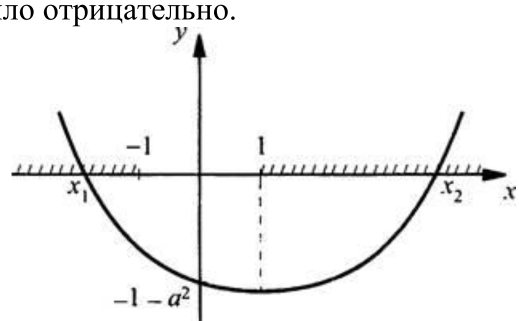
На координатной плоскости bOx построим корни $x_1 = b$ и $x_2 = 4$ квадратного трехчлена. Очевидно, что данное неравенство $x^2 - (b + 4)x + 4b \geq 0$ выполняется на промежутках x, расположенных за корнями x_1 и x_2 квадратного трехчлена. Множество таких точек (b; x) заштриховано. Если зафиксировать значение b и провести вертикальную прямую $x = b$, то видно, что штрихпунктирная линия попадает в заштрихованную область на промежутках $x \in (-\infty; b] \cup [4; +\infty)$. Эти промежутки являются решением неравенства при $b < 4$. Аналогично получаем решения неравенства при $b = 4$ и $b > 4$.



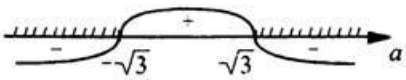
Пример 11

Найдем все значения a, при которых один из корней уравнения $x^2 - 2x - a^2 = 0$ меньше (-1), а другой больше 1.

Найдем дискриминант этого уравнения: $D = 2^2 - 4 \cdot \{-a^2) = 4 + 4a^2$. При всех значениях a величина $D > 0$, поэтому уравнение имеет два различных корня. Схематично изобразим график функции $y = x^2 - 2x - a^2$. Вершина этой параболы находится в точке $(1; -1 - a^2)$. Тогда больший корень x_2 всегда больше 1. Для того чтобы меньший корень x_1 был меньше (-1), необходимо и достаточно, чтобы значение функции y при $x = -1$ было отрицательно.



Запишем это условие: $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - a^2 < 0$ или $3 - a^2 < 0$. Решим это неравенство методом интервалов. Находим корни соответствующего уравнения: $a_1 = -\sqrt{3}$ и $a_2 = \sqrt{3}$. При $a = 0$ определяем знак этого выражения: $3 - 0^2 - 3 > 0$ - и рисуем диаграмму знаков. Теперь можно записать ответ: при $a \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ условия задачи выполнены.



IV. Контрольные вопросы

1. Дайте определение рационального неравенства.

2. Общая схема решения рациональных неравенств.

3. На примере объясните решение неравенства методом интервалов.

4. Кратность корня многочлена и ее влияние на применение метода интервалов к решению неравенства (поясните на примерах).

V. Задание на уроках

§ 2, № 1 (в); 4 (б); 7 (а, б); 9 (в, г); 15 (а); 18 (в); 22 (а, б); 24 (в, г); 26 (а); 30 (в); 32 (а, б); 33 (в, г); 35; 37 (а, б).

VI. Задание на дом

§ 2, № 1 (г); 4 (г); 7 (в, г); 9 (а, б); 15 (б); 18 (г); 22 (в, г); 24 (а, б); 36 (б); 30 (г); 32 (в, г); 33 (а, б); 36; 37 (в, г).

VII. Творческие задания

Решите неравенство:

1) $(2x-3)(5x+2) \ge (2x-3)(3x-8)$;

2) $(3x-1)(4x+3) \le (3x-1)(2x-5)$;

3) $(3x-7)^2 \ge (7x-3)^2$;

4) $(5x-4)^2 \ge (4x-5)^2$;

5) $x^2(x^2-16) \le 9(x^2-16)$;

6) $x^2(x^2-4) \ge 25(x^2-4)$;

7) $(x+1)(x-2)(x-1)^2 \ge 0$;

8) $(x+3)(x-6)(x+2)^2 \ge 0$;

9) $(5x-2)(3x^2-x-4)^2 \ge (4x+1)(3x^2-x-4)^2$;

10) $(4x-1)(2x^2-x-3)^2 \ge (3x+4)(2x^2-x-3)^2$;

11) $\dfrac{4}{x^2-4x} < \dfrac{1}{x-4}$;

12) $\dfrac{6}{x^2-6x} < \dfrac{1}{x-6}$;

13) $\dfrac{x-2}{x+7} > \dfrac{x-5}{x+4}$;

14) $\dfrac{x-3}{x+6} < \dfrac{x-4}{x+5}$;

15) $(3x^2+1)(x^2-6x+8)^2 \cdot (2x-3)^3 \cdot (5x-4)^8 \ge 0$;

16) $(3x^2-4x+1)^4 \ge (2x^2-3x+3)^4$;

17) $(9x^4-9x-10)^3 \le (8x^4-9x-9)^3$;

18) $|3x^2-11x+6|(6x^2-11x+3) \ge 0$;

19) $(x^2+6x+11)(x^2+6x+13) \le 8$;

20) $|x^2-4| < |x+2|$;

21) $|x^2-1| > |x-1|$;

22) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} \le \dfrac{1}{x-3}$;

23) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} \ge -3$.

Найдите все пары (x; y) целых чисел x и y, для которых е но неравенство:

24) $(x^2-4x+7)(y^2+2y+10) \le 27$;

25) $7(x-5)^2+5(y-7)^2 \le 6$;

26) $x^2+4x+6 \le \dfrac{2}{y^2-6y+10}$;

27) $\dfrac{1}{2(x+5)^2} + \dfrac{2}{5(y-3)^2} \ge 0,9$;

28) $\dfrac{1}{9(x-7)^2+7(y-9)^2} \ge \dfrac{1}{8}$;

29) $\sqrt{x^2-6x+13} \cdot \sqrt{y^2+10y+34} \le 6$.

При всех значениях параметра a решите неравенство:

30) $(a+1)x-3a+1\le 0;$

31) $(a^2-1)x-2a+1>0;$

32) $ax+3(a-x)<8a-13x+1;$

33) $a^2(x+1)+a\le x+2;$

34) $(a+1)x^2-2\ge 0;$

35) $ax>\dfrac{1}{x};$

36) $ax^2+(a+1)x+1>0;$

37) $(a+2)x^2-(2a+1)x+a\ge 0.$

Ответы:

1) $x\in(-\infty;-5]\cup[1,5;\infty);$

2) $x\in\left[-4;\dfrac{1}{3}\right];$

3) $x\in[-1;1];$

4) $x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty);$

5) $x\in[-4;-3]\cup[3;4];$

6) $x\in(-\infty;-5]\cup[-2;2]\cup[5;\infty);$

7) $x\in(-\infty;-1]\cup\{1\}\cup[2;\infty);$

8) $x\in(-\infty;-3]\cup\{-2\}\cup[6;\infty);$

9) $x\in\{-1\}\cup\left\{\dfrac{4}{3}\right\}\cup[3;\infty);$

10) $x\in\{-1\}\cup\{1,5\}\cup[5;\infty);$

11) $x\in(0;4)\cup(4;\infty);$

12) $x\in(0;6)\cup(6;\infty);$

13) $x\in(-\infty;-7)\cup(-4;\infty);$

14) $x\in(-\infty;-6)\cup(-5;\infty);$

15) $x\in\left\{\dfrac{4}{5}\right\}\cup\left[\dfrac{3}{2};\infty\right);$

16) $x\in(-\infty;-1]\cup[2;\infty);$

17) $x\in[-1;1];$

18) $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left\{\dfrac{2}{3}\right\}\cup\left[\dfrac{3}{2};\infty\right);$

19) $x=-3;$

20) $x\in(1;3);$

21) $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;\infty);$

22) $x\in(-1;2]\cup[3,5;7);$

23) $x\in(-\infty;1)\cup\left[\dfrac{3}{2};2\right]\cup(3;\infty);$

24) $(2;-1);$

25) $(5;6),(5;7),(5;8);$

26) $(-2; 3)$;

27) $(-4; 4), (-4; 2), (-6; 4), (-6; 2)$;

28) $(7; 8), (7; 10)$;

29) $(3; -5)$;

30) при $a \in (-\infty; -1)$ $x \in \left[\frac{3a-1}{a+1}; \infty\right)$; при $a = -1$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-1; \infty)$ $x \in \left(-\infty; \frac{3a-1}{a+1}\right]$;

31) при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ $x \in \left(\frac{2a-1}{a^2-1}; \infty\right)$, при $a = -1$ $x \in (-\infty; \infty)$, при $a = 1$ $x \in \varnothing$; при $a \in (-1; 1)$ $x \in \left(-\infty; \frac{2a-1}{a^2-1}\right)$;

32) при $a \in (-\infty; -10)$ $x \in \left(\frac{5a+1}{a+10}; \infty\right)$, при $a = -10$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-10; \infty)$ $x \in \left(-\infty; \frac{5a+1}{a+10}\right)$;

33) при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ $x \in \left(-\infty; -\frac{a+2}{a+1}\right]$, при $a = \pm 1$ $x \in (-\infty; \infty)$, при $a \in (-1; 1)$ $x \in \left[-\frac{a+2}{a+1}; \infty\right)$;

34) при $a \in (-\infty; -1]$ $x \in \varnothing$, при $a \in (-1; \infty)$ $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{a+1}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{a+1}}; \infty\right)$;

35) при $a \in (-\infty; 0]$ $x \in (-\infty; 0)$, при $a \in (0; \infty)$ $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{a}}; \infty\right)$;

36) при $a \in (-\infty; 0)$ $x \in \left(-1; -\frac{1}{a}\right)$, при $a = 0$ $x \in (-1; \infty)$, при $a \in (0; 1)$ $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{a}\right) \cup (-1; \infty)$, при $a \in [1; \infty)$ $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{a}; \infty\right)$;

37) при $a \in (-\infty; -2)$ $x \in \left(\frac{2a+1+\sqrt{1-4a}}{2a+4}; \frac{2a+1-\sqrt{1-4a}}{2a+4}\right)$, при $a = -2$ $x \in \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$, при $a \in \left(-2; \frac{1}{4}\right)$ $x \in \left(-\infty; \frac{2a+1-\sqrt{1-4a}}{2a+4}\right) \cup \left(\frac{2a+1+\sqrt{1-4a}}{2a+4}; \infty\right)$, при $a \in \left[\frac{1}{4}; \infty\right)$ $x \in (-\infty; \infty)$.

VIII. Подведение итогов уроков