Системы неравенств

Цель: рассмотреть решение системы неравенств с одной переменной.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Пересечение множеств А и В.

2. Даны множества А = {3; 1; 4; 2; 7} и В = {1; 8; 6; 3; 2}. Найдите пересечение и объединение этих множеств.

3. Даны множества А = [-3; 5) и В = (-1; 8). Найдите пересечение и объединение этих промежутков.

Вариант 2

1. Объединение множеств А и В.

2. Даны множества А = {2; 5; 1; 8; 3 } и В = {9; 4; 3; 5; 2}. Найдите пересечение и объединение этих множеств.

3. Даны множества А = [-4; 7) и В = [-2; 10). Найдите пересечение и объединение этих промежутков.

III. Изучение нового материала

Часто возникает задача нахождения общих решений нескольких неравенств с одной переменной. Тогда возникает понятие *системы неравенств*.

Определение. Несколько неравенств с одной переменной x образуют *систему неравенств*, если необходимо найти все значения переменной, при которых каждое неравенство обращается в верное числовое неравенство (т. е. найти общие решения данных неравенств). Любое такое значение переменной x называют решением (или частным решением) системы неравенств. Множество всех частных решений системы неравенств является общим решением системы неравенств (или, проще, решением системы неравенств).

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой (как и в системах уравнений) или записываются в виде двойного неравенства.

Пример 1

а) Запись $\begin{cases} 3x-2 \ge 1, \\ 2x-1<3 \end{cases}$ означает, что неравенства 3x - 2 ≥ 1 и 2x - 1 < 3 образуют систему и необходимо искать общие решениях этих неравенств.

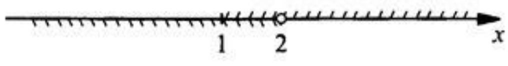
б) Запись 2x - 1 < 3x + 2 ≤ 4x + 3 эквивалентна записи $\begin{cases} 2x-1<3x+2, \\ 3x+2 \le 4x+3. \end{cases}$ Тогда неравенства 2x - 1 < 3x + 2 и 3x + 2 ≤ 4x + 3 образуют систему и необходимо искать общие решения этих неравенств.

Решить систему неравенств - значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Поэтому для решения системы неравенств пользуются определением: решают каждое неравенство системы отдельно, потом находят общее решение из ранее полученных.

Пример 2

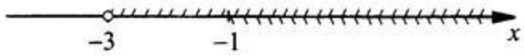
Решим системы неравенств из примера 1.

а) Для системы линейных неравенств $\begin{cases} 3x-2 \ge 1, \\ 2x-1<3 \end{cases}$ решение первого неравенства x ≥ 1, второго неравенства - x < 2. Отметим эти решения на одной координатной прямой штриховкой: для первого неравенства - сверху, для второго неравенства - снизу.



Видно, что общими решениями (т. е. решением системы неравенств) является промежуток [1; 2). Этот промежуток будет Пересечением множеств решений каждого неравенства: x_1 = [1; +∞) и x_2 = (-∞; 2) - область двойной штриховки.

б) Для системы линейных неравенств $\begin{cases} 2x-1<3x+2, \\ 3x+2 \le 4x+3 \end{cases}$ решение первого неравенства x > -3, второго неравенства - x ≥ -1. Отметим эти решения на одной координатной прямой штриховкой: для первого неравенства - сверху, для второго неравенства - снизу.



Видно, что общими решениями (т. е. решением системы неравенств или двойного неравенства) является промежуток [-1; +∞). Этот промежуток будет пересечением множеств решений каждого неравенства: x_1 = (-3; +∞) и x_2 = [-1; +∞) - область двойной штриховки.

Учитывая пример 2, можем сформулировать *алгоритм решения системы* неравенств $\begin{cases} f(x) \vee 0, \\ g(x) \vee 0: \end{cases}$

1) находят множество x_1 решений неравенства f(x) v 0 и множества x_2 решений неравенства g(x) v 0;

2) находят пересечение $x_1 \cap x_2$ этих множеств, которое и является решением данной системы неравенств.

При решении систем неравенств полезно учитывать два очевидных соображения:

1) если в системе из нескольких неравенств одно неравенство не имеет решений, то и вся система не имеет решений;

2) если в системе из нескольких неравенств одно неравенство выполняется при всех значениях переменной, то решением является решение системы, образованной остальными неравенствами.

Пример 3

а) Решим систему неравенств $\begin{cases} 4x^2 + 1 < 4x, \\ 5x - 8 \geq 0. \end{cases}$

Запишем систему в виде $\begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 < 0, \\ 5x - 8 \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} (2x-1)^2 < 0, \\ 5x - 8 \geq 0. \end{cases}$ Очевидно, что первое неравенство системы не имеет решений. Тогда и вся система неравенств не имеет решений, т. е. x ∈ Ø.

б) Решим систему неравенств $\begin{cases} 4x^2 + 1 \geq 4x, \\ 5x - 8 \geq 0. \end{cases}$

Запишем систему в виде $\begin{cases} (2x-1)^2 \geq 0, \\ 5x - 8 \geq 0. \end{cases}$ Решением первого неравенства является любое действительное число x, т. е. x ∈ R. Поэтому достаточно решить второе неравенство 5x - 8 ≥ 0. Его решение x ∈ [1,6; +∞) является также решением всей системы неравенств.

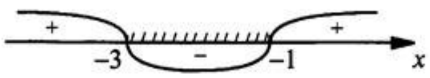
По изложенному алгоритму решаются и более *сложные системы неравенств*.

Пример 4

Решим систему неравенств $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq 0, \\ x^2 + 3x + 2 \geq 0. \end{cases}$

Для решения используем аналитический (метод интервалов) и графический способы.

а) Решим сначала первое неравенство $x^2 + 4x + 3 \leq 0$. Найдем корни соответствующего уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$: x_1 = - 3 и x_2 = -1. Нанесем эти точки на числовую ось, которые разбивают ее на три интервала. Определим знак выражения $x^2 + 4x + 3$, например, при x = 0: $0^2 + 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. После этого легко нарисовать диаграмму знаков рассматриваемого выражения.

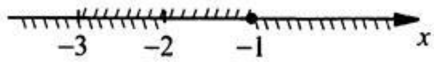


Видно, что неравенство выполняется при x ∈ [-3; -1].

Теперь рассмотрим второе неравенство $x^2 + 3x + 2 \geq 0$. Корни этого выражения x_1 = -2 и x_2 = -1. Наносим эти точки на числовую ось. Определяем знак выражения $x^2 + 3x + 2$, например, при x = 5 : $5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 42 > 0$. Рисуем диаграмму знаков для этого выражения.

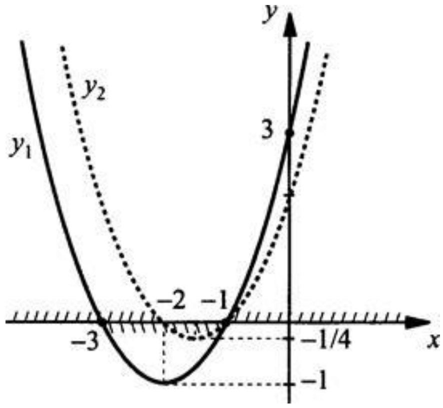
Видно, что неравенство выполняется для x ∈ (-∞; -2]U[-1; +∞).

Найдем те значения x, при которых выполнены оба неравенства. Для этого еще раз нанесем решения первого (штриховка сверху) и второго (штриховка снизу) неравенств на числовую ось. Видно, что оба неравенства выполнены для промежутка x ∈ [-3; -2] и в отдельной точке x = -1.



Итак, решение данной системы неравенств x ∈ [-3; -2]U{-1}.

б) Построим графики функций $y_1 = x^2 + 4x + 3$ и $y_2 = x^2 + 3x + 2$. Видно, что неравенство $x^2 + 4x + 3 \le 0$ (график y_1 находится не выше оси абсцисс) выполнено для $x \in [-3; -1]$. Неравенство $x^2 + 3x + 2 \ge 0$ (график y_2находится не ниже оси абсцисс) выполнено при $x \in [-\infty; -2]U[-1; +\infty)$. Оба неравенства выполнены для $x \in [-3; -2)U\{-1\}$.



При решении систем неравенств целесообразно начинать решение с самого простого неравенства.

Пример 5

Решим систему неравенств $\begin{cases} 3x^4 + 5x + 1 \ge 0, \\ x^5 + 6x^2 > 0, \\ 3x - 2 \ge 0. \end{cases}$

Решение системы начнем с третьего неравенства. Его решение: $x \ge 2/3$ (тогда $x > 0$). Очевидно, что при положительных значениях x каждое слагаемое в левых частях первого и второго неравенств положительно. Поэтому первое и второе неравенства выполнены. Следовательно, решение третьего неравенства $x \in [2/3; +\infty)$ является также решением всей системы неравенств.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение системы неравенств.
2. Частное и общее решения системы неравенств.
3. Алгоритм решения системы неравенств.

V. Задание на уроках

§ 4, № 1 (а, б); 2 (а); 6 (а, г); 9 (а, б); 12 (г); 14 (а, б); 17 (в, г); 18; 23 (а); 26 (г); 29 (б); 31 (а); 35 (а, б); 36 (в, г); 38 (а, б); 39 (а).

VI. Задание на дом

§ 4, № 1 (в, г); 2 (б); 6 (б, в); 9 (в, г); 12 (б); 14 (в, г); 17 (а, б); 19; 23 (б); 26 (а); 29 (г); 31 (б); 35 (в, г); 36 (а, б); 38 (в, г); 39 (б).

VII. Подведение итогов уроков