Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций

Цель: использовать системы уравнений для решения текстовых задач.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Способом подстановки решите систему уравнений $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x^2+3xy-5y^2+7x+4y=3. \end{cases}$

Ответы: а) (1; 2); б) (1; 2), (32; -13,5); в) (1; 2), $\left(32\frac{1}{3}; -13\frac{2}{3}\right)$; г) (1; 2), (23;-9).

2. Способом сложения решите систему уравнений $\begin{cases} 3(x-2)^2+7(y+3)^3=5, \\ 2(x-2)^2-7(y+3)^3=15. \end{cases}$

Ответы: а) (0; -4), (4; -4); б) (4; -4); в) (2; -4); г) (4; -6).

Вариант 2

1. Способом подстановки решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=3, \\ 3x^2+4xy+7y^2+x+8y=5. \end{cases}$

Ответы: а) (2; -1); б) (2; -1), $\left(\frac{41}{23}; -\frac{13}{23}\right)$; в) (2; -1), (34; -65); г) (2; -1), (18; -33).

2. Способом сложения решите систему уравнений $\begin{cases} 7(x+2)^3+2(y+1)^2=1, \\ 3(x+2)^3-2(y+1)^2=-11. \end{cases}$

Ответы: а) (-3; 1); б) (-3; 2); в) (-3; -3); г) (-3; 1), (-3; -3).

III. Изучение нового материала

Системы уравнений с двумя переменными часто используются при решении текстовых задач. Для этого применяют стандартную схему:

Первый этап - составление математической модели;

Второй этап - работа с составленной моделью;

Третий этап - ответ на вопрос задачи.

На примерах рассмотрим использование этой схемы.

Пример 1

Произведение двух чисел равно 168, а сумма их квадратов равна 340. Найдем эти числа.

Первый этап - составление математической модели.

Пусть одно из чисел равно x, другое - y. Тогда их произведение xy. По условию задачи оно равно 168. Получаем первое уравнение: xy = 168. Квадрат одного числа равен x^2, квадрат другого числа – y^2. Сумма квадратов чисел составляет $x^2 + y^2$. По условию такая сумма равна 340. Имеем второе уравнение: $x^2 + y^2 = 340$. Итак, для нахождения чисел x и y получили систему двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} xy=168, \\ x^2+y^2=340. \end{cases}$ Таким образом, математическая модель задачи составлена.

Второй этап - работа с составленной моделью.

Каждое уравнение полученной системы имеет вторую степень. Поэтому система уравнений нелинейна. Для ее решения можно предложить два способа.

<u>1-й способ</u>. Используем способ подстановки. Из первого уравнения выразим $y=\frac{168}{x}$ и подставим во второе уравнение. Получаем: $x^2+\left(\frac{168}{x}\right)^2=340$ или $x^4 - 340x^2 + 28\ 224 = 0$. Корни этого биквадратного уравнения $x_{1,2} = \pm 12$ и $x_{3.4} = \pm 14$. По формуле $y=\frac{168}{x}$ найдём соответствующие значения y: $y_{1,2} = \pm 14$ и $y_{3,4} = \pm 12$. Итак, задача имеет четыре решения: (12; 14), (-12; -14), (14; 12), (-14; -12).

2-й способ. Используем способ сложения. Умножим первое уравнение на 2 и запишем систему уравнений в виде $\begin{cases} x^2+y^2=340, \\ 2xy=336. \end{cases}$ Сложим и вычтем уравнения системы. Имеем: $\begin{cases} x^2+y^2+2xy=676, \\ x^2+y^2-2xy=4, \end{cases}$ или $\begin{cases} (x+y)^2=676, \\ (x-y)^2=4, \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=\pm 26, \\ x-y=\pm 2. \end{cases}$

Таким образом, данная система сводится к четырем системам линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=26, \\ x-y=-2 \end{cases}$ - решение(12; 14);

б) $\begin{cases} x+y=-26, \\ x-y=2 \end{cases}$ - решение (-12; -14);

в) $\begin{cases} x+y=26, \\ x-y=2 \end{cases}$ - решение(14; 12);

г) $\begin{cases} x+y=-26, \\ x-y=-2 \end{cases}$ - решение (-14; -12).

Третий этап - ответ на вопрос задачи.

По условию задачи не требуется конкретизировать, какое из чисел первое, а какое второе. Поэтому искомые числа 12 и 14, а также числа, противоположные им: -12 и -14.

Пример 2

Периметр прямоугольного треугольника равен 30 см, а его гипотенуза равна 13 см. Найдите стороны треугольника.

Первый этап - составление математической модели.

Пусть катеты треугольника равны x см и y см. Учтем, что периметр многоугольника - сумма длин всех его сторон. Получаем первое уравнение: x + y + 13 = 30 см. Для записи второго уравнения учтем теорему Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Имеем второе уравнение: $x^2 + y^2 = 13^2$. Итак, для нахождения катетов треугольника получили систему уравнений: $\begin{cases} x+y+13=30, \\ x^2+y^2=13^2. \end{cases}$

Второй этап - работа с составленной моделью.

Запишем полученную систему уравнений в виде $\begin{cases} x+y=17, \\ x^2+y^2=169. \end{cases}$ Первое уравнение системы линейное, второе уравнение имеет вторую степень. Поэтому решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим y = 17 - x и подставим во второе уравнение. Получаем квадратное уравнение: $x^2 + (17 - x)^2 = 169$ или $x^2 - 17x + 60 = 0$, корни которого $x_1 = 5$ и $x_2 = 12$. По формуле y = 17 - x найдем соответствующие значения y: $y_1 = 17 - 5 = 12$ и $y_2 = 17 - 12 = 5$.

Третий этап - ответ на вопрос задачи.

Система уравнений имеет два решения: (5; 12) и (12; 5). Так как непонятно, какой из катетов первый, а какой второй, то запишем ответ: катеты треугольника равны 5 см и 12 см.

Пример 3

Катер проходит 80 км но течению реки и 40 км - против течения за 6 ч 30 мин. Тот же катер проходит 40 км по течению и 80 км - против течения за 7 ч. Найти собственную скорость катера и скорость течения реки.

Первый этап - составление математической модели.

Пусть x (км/ч) - собственная скорость катера, y (км/ч) - скорость течения реки. Тогда скорость катера по течению реки (x + y) (км/ч), против течения реки - (x -y) (км/ч).

80 км по течению реки катер проходит за время $\frac{80}{x+y}$ (ч), а 40 км против течения - за время $\frac{40}{x-y}$ (ч). Так как в этом случае на весь путь было затрачено 6 ч 30 мин (т. е. $6\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$ ч), то получаем первое уравнение: $\frac{80}{x+y}+\frac{40}{x-y}=\frac{13}{2}.$

Рассмотрим вторую ситуацию. 40 км по течению реки катер проходит за время $\frac{40}{x+y}$ (ч), 80 км против течения - за время $\frac{80}{x-y}$ (ч). В этом случае на весь путь было затрачено время 7 ч. Поэтому получаем второе уравнение: $\frac{40}{x+y}+\frac{80}{x-y}=7.$

Для нахождения собственной скорости катера x и скорости течения реки y имеем систему уравнений: $\begin{cases}\frac{80}{x+y}+\frac{40}{x-y}=\frac{13}{2},\\ \frac{40}{x+y}+\frac{80}{x-y}=7.\end{cases}$

Второй этап - работа с составленной моделью.

Получили систему рациональных уравнений. Если в каждом уравнении избавиться от знаменателей, то увидим, что уравнения имеют вторую степень (т. е. нелинейны).

Учитывая структуру уравнений системы, решим ее способом введения новых переменных: $a=\frac{40}{x+y}$ и $b=\frac{40}{x-y}.$ Тогда исходная система уравнений становится линейной: $\begin{cases}2a+b=\frac{13}{2},\\ a+2b=7.\end{cases}$ Решим эту систему, например, способом алгебраического сложения. Умножим первое уравнение на (-2) и получим систему $\begin{cases}-4a-2b=-13,\\ a+2b=7.\end{cases}$ Сложим эти уравнения и получим: -3a = -6, откуда a = 2. Подставим такую величину во второе уравнение: 2 + 2b = 1, откуда b = 5/2. Вернемся к старым переменным. Имеем систему уравнений $\begin{cases}\frac{40}{x+2}=2,\\ \frac{40}{x-y}=\frac{5}{2}\end{cases}$ или $\begin{cases}x+y=20,\\ x-y=16.\end{cases}$ Сложим и вычтем, соответственно, уравнения системы. Получаем: 2x = 36 (откуда x = 18) и 2y = 4 (откуда y = 2).

Третий этап - ответ на вопрос задачи.

Решив систему уравнений, получили: x = 18 и y = 2. Итак, собственная скорость катера 18 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч.

Как видно из примеров 1-3, при решении получающихся систем уравнений использовались рассмотренные ранее методы. При этом трудностей не возникало (второй этап схемы решения). Практика показывает, что затруднение у школьников обычно возникает при составлении математической модели задачи (первый этап).

Пример 4

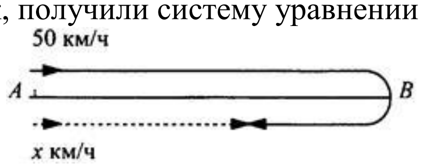
Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время - мотоциклист со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал велосипедиста в 20 км от пункта А. Прибыв в В, мотоциклист через 36 мин выехал обратно и встретился с велосипедистом спустя 3 ч 20 мин после выезда велосипедиста из А. Найти скорость велосипедиста.

Первый этап - составление математической модели.

Пусть x (км/ч) - скорость велосипедиста, t (ч) - время, через которое выехал из пункта А мотоциклист после велосипедиста. Опишем условия задачи. Раз мотоциклист выехал на t (ч) позже велосипедиста, то он и находился в пути на t (ч) меньше.

Первая встреча произошла в 20 км от А. Велосипедист проехал это расстояние за время 20/х (ч), мотоциклист - за время $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$ (ч). Учтем, что мотоциклист находился в пути на t (ч) меньше. Получаем первое уравнение: $\frac{20}{x}-\frac{2}{5}=t.$

Опишем вторую встречу. Она произошла через 3 ч 20 мин = $3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ (ч) после выезда велосипедиста из А. Он за это время проехал расстояние $x\cdot\frac{10}{3}=\frac{10}{3}\cdot x$ (км). Мотоциклист находился в пути $\frac{10}{3}-t-\frac{3}{5}=\frac{41}{15}-t$ (ч) (учтем, что 36 мин = $\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$ ч). За это время он проехал $50\left(\frac{41}{15}-t\right)$ (км). Из рисунка видно, что сумма расстояний, пройденных велосипедистом и мотоциклистом до второй встречи, равна удвоенному расстоянию между пунктами А и В. Получаем второе уравнение: $\frac{10}{3}x+50\left(\frac{41}{15}-t\right)=140.$ Итак, получили систему уравнении: $\begin{cases}\frac{20}{x}-\frac{2}{5}=t,\\ \frac{10}{3}x+50\left(\frac{41}{15}-t\right)=140.\end{cases}$



Заметим, что описание условий задачи (получение системы уравнений) может вызвать определенные трудности.

Второй этап - работа с составленной моделью.

Способ решения определяет условие задачи: надо найти скорость велосипедиста х. Поэтому подставим первое уравнение во второе и постепенно преобразуем полученное уравнение. Имеем: $\frac{10}{3}x+50\left(\frac{41}{15}-\frac{20}{x}+\frac{2}{5}\right)=140,$ или $\frac{10}{3}x+50\cdot\frac{47x-300}{15x}=140,$ или $x^2 + 47x - 300 = 42x$, или $x^2 + 5x - 300 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 15$ и $x_2 = -20$.

Третий этап - ответ на вопрос задачи.

Очевидно, что ответ х = -20 смысла не имеет, так как скорость велосипедиста не может быть отрицательной. Тогда скорость велосипедиста 15 км/ч. Для интереса найдем время $t=\frac{20}{15}-\frac{2}{5}=\frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\frac{14}{15}$ ч = 56 мин (т. е. мотоциклист выехал через 56 мин после велосипедиста).

IV. Задание на уроках

§ 7, № 1, 5, 12, 16, 18, 22, 29, 38, 44, 49, 54.

V. Задание на дом

§ 7, № 2, 8, 13, 17, 19, 23, 30, 39, 45, 50, 55.

VI. Подведение итогов уроков