Смешанные задачи на прогрессии (3 ч)

Цель: рассмотреть задачи, в которые входят две прогрессии - арифметическая и геометрическая.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 40, знаменатель прогрессии равен 3. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.

2. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 54, а пятый равен 6.

Вариант 2

1. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 39, знаменатель прогрессии равен -4. Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

2. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

III. Изучение нового материала

Очень распространены задачи, в условиях которых говорится о двух прогрессиях: арифметической и геометрической. Как правило, для решения этих задач достаточно учесть характеристические свойства этих прогрессий.

Пример 1

Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 8, получится геометрическая прогрессия с суммой членов 26. Найдем эти числа.

Пусть эти числа a, b, c. Так как они образуют арифметическую прогрессию, то выполнено соотношение (свойство арифметической прогрессии): $2b = a + c$. После сложения первого числа с числом 8 получаем числа $(a + 8)$, b, c, которые образуют геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $b^2 = (a + 8)c$. Кроме того, известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 26, т. е. $(a + 8) + b + c = 26$. Получаем для определения a, b, c систему уравнений: $\begin{cases} 2b = a + c, \\ b^2 = (a+8)c, \\ (a+8)+b+c = 26. \end{cases}$ Запишем третье уравнение системы в виде $(a + c) + b = 18$. Учитывая первое уравнение системы, получим: $b + 2b = 18$, $b = 6$. Тогда из первого и второго уравнений получаем систему для определения a и c: $\begin{cases} 12 = a + c, \\ 36 = (a+8)c. \end{cases}$ Выразив из первого уравнения $c = 12 - a$ и подставив во второе, получим уравнение: $36 = (a + 8)(12 - a)$ или $a^2 - 4a - 60 = 0$. Корни этого уравнения $a = -6$ и $a = 10$. Соответствующие им числа $c = 18$ и $c = 2$. Таким образом, искомые числа -6, 6, 18 и 10,6, 2.

Рассмотрим еще два способа решения этой задачи, которые позволяют уменьшить число неизвестных и сразу учесть свойство той или иной прогрессии.

Так как числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то можно записать: $b = a + d$, $c = a + 2d$ (где d - разность этой прогрессии). При этом учтено свойство арифметической прогрессии $2b = a + c$ (действительно, $2(a + d) = a + (a + 2d)$). После прибавления к первому числу числа 8 получаем числа (a + 8), (a + d), (a + 2d), образующие геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $(a + d)^2 = (a + 8)(a + 2d)$. Сумма этих чисел равна 26, т. е. (a + 8) + (a + d) + (a + 2d) = 26. Имеем систему уравнений для определения a, d: $\begin{cases}(a+d)^2=(a+8)(a+2d),\\(a+8)+(a+d)+(a+2d)=26.\end{cases}$ Из второго уравнения a + d = 6, откуда d = 6 - a. Тогда из первого уравнения имеем: 36 = (a + 8)(12 - a), $a^2 - 4a - 60 = 0$. Решив это уравнение, найдем: a = -6 и a = 10. Тогда соответствующие значения d: d = 12 и d = -4. После этого находим числа: a = -6, b = 6, c = 18 и a = 10, b = 6, c = 2.

И наконец, третий способ решения позволяет учесть свойства геометрической прогрессии. Так как числа (a + 8), b, c образуют геометрическую прогрессию, то можно записать b = (a + 8)q, $c = (a + 8)q^2$. При этом выполнено свойство геометрической прогрессии $b^2 = (a + 8)c$ (действительно, $[(a+8)q]^2=(a+8)[(a+8)q^2]$). Сумма этих чисел: $(a+8)+(a+8)q+(a+8)q^2=(a+8)(1+q+q^2)=26$. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, и можно записать ее свойство: $2(a+8)q=a+(a+8)q^2$. Прибавив к обеим частям уравнения 8 и перенеся слагаемое 2(a + 8)q из левой части в правую, получим: $8=(a+8)-2(a+8)q+(a+8)q^2$ или $8=(a+8)(1-2q+q^2)$. Для нахождения a и d имеем систему уравнений: $\begin{cases}(a+8)(1+q+q^2)=26,\\(a+8)(1-2q+q^2)=8.\end{cases}$ Разделив уравнения друг на друга, получим: $\frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\frac{13}{4}$ или $3q^2 - 10q + 3 = 0$, откуда q = 1/3, q = 3. Тогда, соответственно, находим из любого уравнения системы: a = 10 и a = -6. Далее определяем b и c: b = 6, c = 2 и b = 6, c = 18.

Пример 2

Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычесть 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по единице, то снова получим геометрическую прогрессию. Найдем эти числа.

Разумеется, эту задачу можно решить любым из способов, разобранных в примере 1. Так как три числа образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде: a; aq; aq^2. После вычитания из последнего числа 4 получаем числа a; aq; $(aq^2 - 4)$, образующие арифметическую прогрессию. На основании свойства арифметической прогрессии имеем: $2aq = a + (aq^2 - 4)$ или $4 = a(1 – q)^2$. Если из второго и третьего членов этой арифметической прогрессии вычесть по единице, то получим числа a; (aq - 1); $(aq^2 - 5)$, образующие геометрическую прогрессию. Запишем ее свойство: $(aq - 1)^2 = a(aq^2 - 5)$ или 1 = a(2q - 5). Для определения a и q имеем систему уравнений: $\begin{cases}4=a(1-q)^2,\\1=a(2q-5).\end{cases}$ Разделив уравнения друг на друга, получим: $4=\frac{(1-q)^2}{2q-5}$ или $q^2 - 10g + 21 = 0$. Корни этого уравнения q = 3 и q = 7, тогда соответствующие значения: a = 1 и a = 1/9. Теперь находим сами числа: 1; 3; 9 и $\frac{1}{9};\frac{7}{9};\frac{49}{9}$.

Пример 3

Три числа, сумма которых 93, составляют геометрическую прогрессию. Эти числа можно также рассматривать как первый, второй и седьмой члены арифметической прогрессии. Найдем данные три числа.

Так как числа образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде b; bq; bq^2. Их сумма равна 93, и имеем первое уравнение: $b + bq + bq^2 = 93$. Первые два числа образуют арифметическую прогрессию и ее разность $d = bq - b$. Тогда легко записать седьмой член арифметической прогрессии: $b + 6(bq - b) = 6bq – 5b$. По условию задачи этот член равен третьему члену геометрической прогрессии bq^2. Получаем второе уравнение: $6bq - 5b = bq^2$или $0 = q^2 - 6q + 5$, откуда q = 1 и q = 5. Тогда из первого уравнения находим b: $b = \frac{93}{1+q+q^2}$. Для q = 1 b = 31 и данные числа 31, 31; 31; при q = 5 $b = \frac{93}{1+5+5^2} = 3$ и числа: 3, 15, 75.

Итак, данные числа 31,31,31 и 3, 15, 75.

IV. Задание на уроках и дома

§ 17, № 53-56.

1) Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три - арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

2) Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить, соответственно, 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

3) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

4) Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

5) Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Найти ее знаменатель.

6) Сумма трех чисел, образующих убывающую арифметическую прогрессию, равна 60. Если от первого числа отнять 10, от второго отнять 8, а третье оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

7) Три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а их квадраты составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 42.

8) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что $|q| < 1$.

9) Три различных числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, а числа a + b, b + c, a + c составляют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответы: 1) 3; 6; 12; 18 и 18,75; 11,25; 6,75; 2,25; 2) 5103 и 7/81; 3) 4; 8; 16 и -1|; 4) 3; 6; 12 и 4/25; -16/25; 64/25; 4) 3; 6; 12 и 27; 18; 12; 5) -2; 6) 34; 20; 6; 7) $14 - 14\sqrt{2}$; 14; $14 + 14\sqrt{2}$; 8) $2 - \sqrt{3}$; 9) -2.

V. Подведение итогов уроков