Свойства функций (4ч)

Цель: рассмотреть основные свойства функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Постройте график функции:

1) $y = 2x - 4$;

2) $y = x^2 + 2x - 3$;

3) $y = \frac{3}{x}$.

Вариант 2

Постройте график функции:

1) $y = 6 - 3x$;

2) $y = -x^2 + 2x + 3$;

3) $y = -\frac{4}{x}$.

III. Изучение нового материала

Как уже известно из курса 7-8 классов, любая функция характеризуется определенными свойствами. Часть этих свойств ранее рассмотрена. Теперь необходимо систематизировать эти свойства и рассматривать их при исследовании любых функций и построении их графиков.

Остановимся теперь на основных свойствах функции. С двумя свойствами функции вы уже знакомы - это область определения D(f) и область значений E(f) функции y = f(x). Обсудим другие свойства функции и ее графика.

1. Точки пересечения графика функции с осями координат

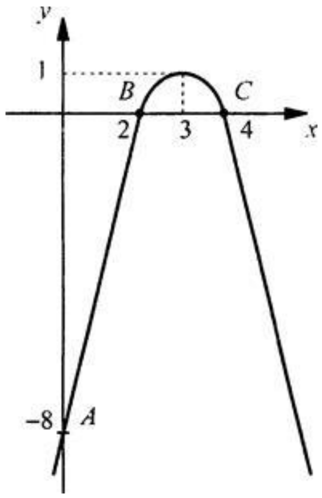
Так как ось 0y характерна тем, что любая точка на ней имеет координату x = 0, а для оси 0x - любая точка на ней имеет координату y = 0, то точки пересечения графика с осями координат ищутся очень просто. Точка пересечения с осью 0y равна значению функции y(x) при x = 0, т. е. y(0). Точки пересечения с осью 0x являются корнями уравнения y(x) = 0 и называются нулями функции.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y(x) = -x^2 + 6x - 8$. Найдем точки пересечения графика этой функции с осями координат.

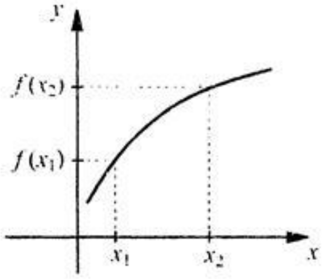
Чтобы определить точку пересечения графика с осью ординат, вычислим значение функции y(x) при x = 0: $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$. Получаем координаты этой точки A(0; -8).

Теперь определим точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс. Для этого в функцию $y = -x^2 + 6x - 8$ подставим значение y = 0 и получим квадратное уравнение: $0 = -x^2 + 6x - 8$ или $0 = x^2 - 6x + 8$. Решим его: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$, т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: B(2; 0) и C(4; 0). Для наглядности на рисунке приведен график данной функции (здесь мы несколько забежали вперед).

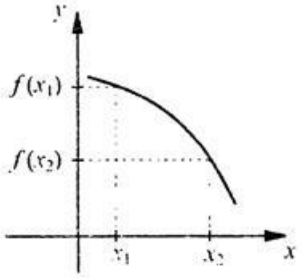


2. Монотонность функции

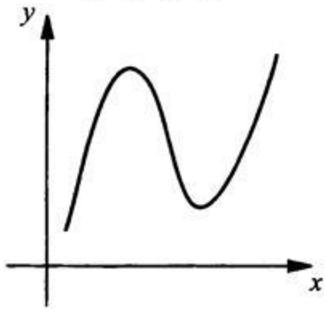
Рассмотрим еще одно свойство функции - монотонность (т. е. возрастание или убывание функции). Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на множестве $X \subset D(f)$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$). Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на множестве $X \subset D(f)$, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$). Па рисунке приведены графики монотонных (возрастающей и убывающей) и немонотонной функций.



Возрастающая функция, $f(x_2) > f(x_1)$



Убывающая функция, $f(x_2) < f(x_1)$



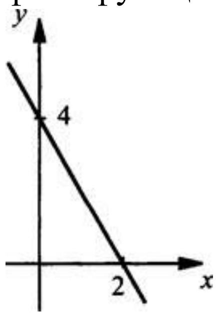
Немонотонная функция

Пример 2

Определим монотонность функции $f(x) = -2x + 4$.

Область определения этой функции - все значения x, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Возьмем два значения x из области определения этой функции x_1 и x_2, и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $f(x_1) = -2x_1 + 4$ и $f(x_2) = -2x_2 + 4$. Теперь необходимо сравнить эти значения и определить, какое из них больше. Для этого рассмотрим разницу этих величин: $f(x_2) – f(x_1) = (-2x_2+ 4) - (-2x_1 + 4) = -2x_2 + 4 + 2x_1 - 4 = -2(x_2 – x_1)$.

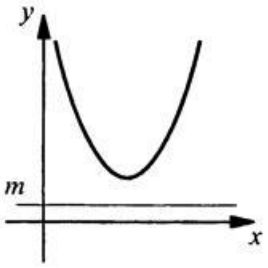
Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 – x_1 > 0$ и величина $-2(x_2 – x_1) < 0$. Поэтому получаем: $f(x_2) – f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$. Это неравенство означает, что большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поэтому данная функция (по определению) является убывающей. Это же видно из приведенного графика функции:



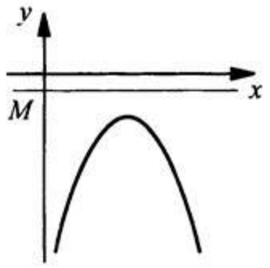
Функция во всей области определения D(f) может быть немонотонной, но на множестве X ⊂ D(f) функция может быть монотонной. Например, в примере 1 функция в целом немонотонна, но на промежутке X = [3; +∞) функция убывает, а на промежутке X = (-∞; 3] - возрастает (докажите самостоятельно).

3. Ограниченность функции

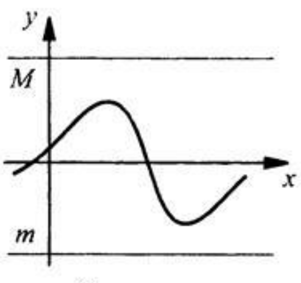
Следующее свойство - ограниченность функции. Функция y = f(x) называется *ограниченной снизу* на множестве X ⊂ D(f), если все значения функции больше некоторого числа т (т. е. f(x) = m). Функция y = f(x) называется *ограниченной сверху* на множестве X ⊂ D(f), если все значения функции меньше некоторого числа M (т. е. f(x) < M). Если функция ограничена снизу и сверху, то она называется *ограниченной*. На рисунке приведены графики ограниченных и неограниченной функций.



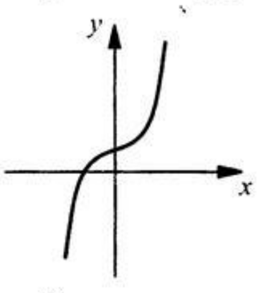
Ограничена снизу



Ограничена сверху



Ограничена



Не ограничена

Для выяснения ограниченности функции очень часто используются алгебраические преобразования.

Пример 3

Докажем, что функция $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ ограничена сверху.

Выделим в функции $f(x) = -(x^2 - 6x + 8)$ полный квадрат разности. Для этого в скобках прибавим и вычтем единицу. Получаем: $f(x) = -(x^2 - 6x + 8 + 1 - 1) = -((x^2 - 6x + 9) - 1) = -((x-3)^2 - 1) = 1 - (x-3)^2$. Так как при всех значениях x величина $(x - 3)^2 \geq 0$, величина $-(x - 3)^2 \leq 0$, то $1 - (x - 3)^2 \leq 1$, т. е. $f(x) \leq 1$. Тогда (по определению) данная функция ограничена сверху (при этом число M, входящее в определение, равно 2). Из графика примера 1 наглядно видно, что при всех значениях x значения $f(x) < 2$. Заметим, что в качестве числа M можно выбрать любое число, большее 1 (например, M = 3,84).

4. Наименьшее и наибольшее значения функции

Число m называют наименьшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

1) существует число $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = m$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Число M называют *наибольшим* значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

1) существует число $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = M$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Пример 4

Найдем наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

В примере 3 было показано, что существует такое число $x_0 = 3$, что $f(x_0) = f(3) = 1$, т. е. m = 1. При этом для любого значения $x \in (-\infty; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) \leq 1$, так как $f(x) \leq f(x_0)$. Тогда по определению функция f(x) имеет наибольшее значение $f_{наиб} = 1$ и оно достигается при $x_0 = 3$. При этом было найдено наибольшее значение функции во всей области определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Разумеется, можно находить наименьшее и наибольшее значения функции не во всей области определения D(f), а на некотором множестве X этой области.

Пример 5

Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = -2x + 4$ на отрезке [-1; 3].

В примере 2 было показано, что данная функция убывает во всей области определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Поэтому наименьшее значение функции достигается на правом конце отрезка (т. е. в точке $x_1 = 3$), и оно равно $f_{наим} = f(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2$. Наибольшее значение функции достигается на левом конце отрезка (т. е. в точке $x_2 = -1$), И оно равно $f_{наиб} = f(-1) = -2 \cdot (-1) + 4 = 6$.

5. Четность и нечетность функции

Предварительно введем еще одно понятие - симметричность области определения. Область определения называется *симметричной*, если функция определена и в точке x_0 и в точке $(-x_0)$ (т. е. в точке симметричной x_0 относительно начала числовой оси).

Пример 6

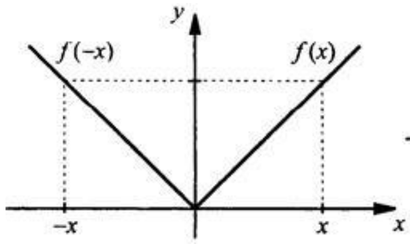
а) Областью определения функции $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x^2 - 4 = 0$ (т. е. $x = \pm 2$). Поэтому эта функция определена, например, как при x = -1, так и при x = -(-1) = 1. И наоборот, эта функция не определена и при x = -2, и при x = -(-2) = 2. Следовательно, область определения данной функции $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ симметричная.

б) Областью определения функции $f(x) = \frac{2-3x}{x-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых x - 4 = 0 (т. е. x = 4). Поэтому эта функция определена в точке x = -4, но не определена в симметричной точке x = -(-4) = 4. Поэтому область определения данной функции $D(f) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ не является симметричной.

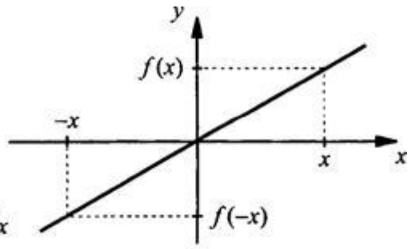
Понятие четности функции вводится только для функции с симметричной областью определения. Функция называется четной, если при изменении знака *аргумента значение функции не меняется, т. е. f(-x) = f(x). График четной функции всегда симметричен относительно оси ординат.*

Функция называется нечетной, если при изменении знака аргумента значение функции также меняется на противоположное, т. е. f(-x) = -f(x). График нечетной функции всегда симметричен относительно начала координат.

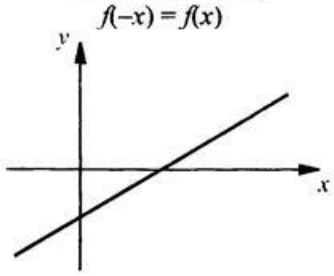
На рисунке приведены (для наглядности) графики четной, нечетной функции и функции, не имеющей никакой четности.



Четная функция,
$f(-x) = f(x)$



Нечетная функция,
$f(-x) = -f(x)$



Функция, не имеющая четности

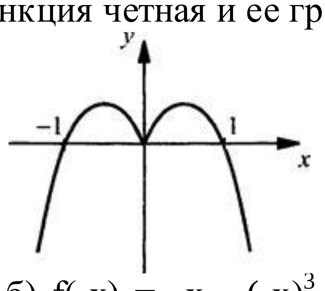
Пример 7

Выясним четность функций:

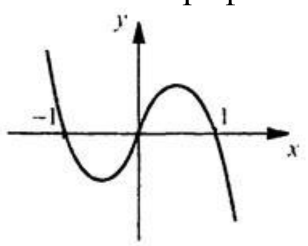
а) $f(x) = |x| - x^2$;
б) $f(x) = x - x^3$;
в) $f(x) = x - 2$.

Прежде всего отметим, что области определения всех трех функций D(f) = (-∞; +∞) симметричные. Для выяснения четности этих функций f(x) надо найти значение f(-x) и сравнить значения f(x) и f(-x).

а) $f(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2$ (здесь учтено, что $|-x| - |x|$ и $(-x)^2 = x^2$). Теперь легко видеть, что f(-x) совпадает с данной функцией f(x), т. е. f(-x) = f(x). Поэтому данная функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

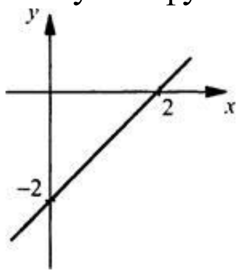


б) $f(-x) = -x - (-x)^3 = -x + x^3 = -(x - x^3) = -f(x)$. Видно, что значения функции в точках x и -x противоположны по знаку, т. е. f(-x) = -f(x). Поэтому данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.



в) f(-x) = -x - 2. Сравнивая значение f(-x) = -x - 2 со значением f(x) = x – 2, видим, что равенство f(-x) = f(x) не выполняется. Поэтому эта функция не является четной.

Найдем теперь величину $-f(x) = -(x - 2) = 2 - x$. Сравнивая значение $f(-x) = -x - 2$ со значением $-f(x) = 2 - x$, видим, что равенство $f(-x) = -f(x)$ также не выполняется. Поэтому эта функция не является нечетной.

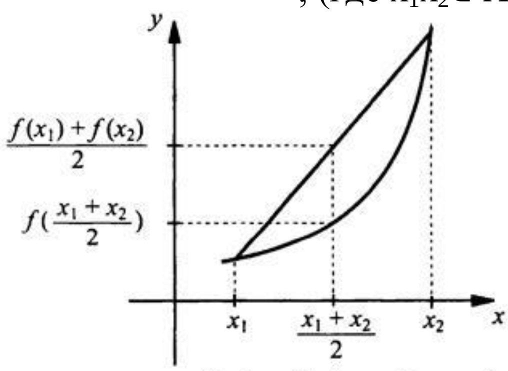


Итак, данная функция никакой четности не имеет и ее график не обладает никакой симметрией.

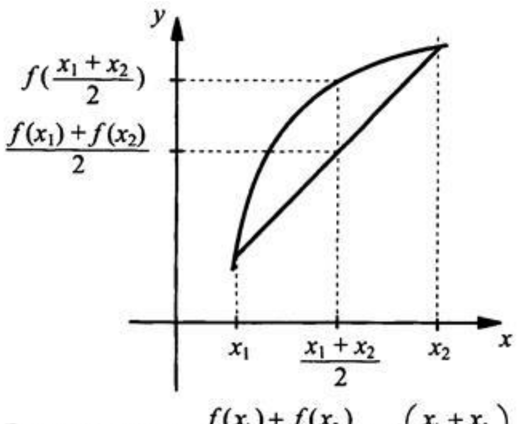
6. Выпуклость графика функции

Функция $y = f(x)$ *выпукла вниз* на промежутке X, если при соединении любых двух точек графика хордой часть графика располагается ниже этой хорды, т. е. $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, (где $x_1 x_2 \in X$).

Функция $y = f(x)$ *выпукла вверх* на промежутке X, если при соединении любых двух точек графика хордой часть графика располагается выше этой хорды, т. е. $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, (где $x_1 x_2 \in X$).



Выпукла вниз, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$



Выпукла вверх, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

Пример 8

Докажем, что функция $f(x) = x^2$ выпукла вниз в области определения.

Область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Выберем произвольные значения x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$ из этой области. Найдем: $f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$ и $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{2}$.

Покажем, что $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Действительно, получаем: $\frac{x_1^2+x_2^2}{2} > \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}$, или $2x_1^2+2x_2^2 > x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$, или $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2>0$, или $(x_1 - x_2)^2 > 0$. Так как $x_1 \neq x_2$, то имеем верное неравенство.

Мы доказали, что $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Тогда по определению функция f(x) выпукла вниз.

7. Непрерывность функции

Функция у = f(x) непрерывна на промежутке X, если при малом изменении аргумента функция меняется незначительно, т. е. при $x_2 - x_1 \to 0$ разность $f(x_2) - f(x_1) \to 0$. При этом графикнепрерывной функции сплошной и не имеет разрывов.

Пример 9

Покажем, что функция $f(x) = x^3$ непрерывна в области определения.

Область определения функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Выберем произвольные значения x_1 и x_2 такие, что $x_2 \to x_1$, т. е. $x_2 - x_1 \to 0$. Найдем разность $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)$. Так как $x_2 - x_1 \to 0$, то и разность $f(x_2) - f(x_1) \to 0$. Поэтому функция f(x) по определению является непрерывной.

Пример 10

Докажем, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } -1\le x<1, \\ 2, & \text{если } x\ge 1, \end{cases}$ имеет разрыв в точке x = 1.

Область определения функции $D(f) = [-1; +\infty)$. Из этой области выберем значения $x_2 = 1$ и x_1 (при этом $x_1 < 1$ и $x_1 \to 1$, т. е. $x_2 - x_1 \to 0$). Найдем разность $f(x_2) - f(x_1) = 2 - x_1^2$. Оценим эту разность. Так как $x_1 < 1$, то справедливо неравенство $0 \le x_1^2 < 1$. Все части этого неравенства умножим на отрицательное число (-1). При этом знаки неравенства меняются на противоположные: $0 \ge -x_1^2 > -1$. Ко всем частям этого неравенства прибавим число 2 и получим: $2 \ge 2 - x_1^2 > 1$, т. е. $f(x_2) - f(x_1) \le 2$. Видно, что разность $f(x_2) - f(x_1)$ не стремится к нулю, несмотря на то что разность $x_2 - x_1 \to 0$. Поэтому в точке x = 1 функция имеет разрыв. В этом легко убедиться, построив график функции. Предлагаем самостоятельно доказать, что в остальных точках области определения функция является непрерывной.

IV. Контрольные вопросы

1. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?
2. Определение возрастающей (убывающей) функции.
3. Функция, ограниченная снизу (сверху).
4. Наименьшее и наибольшее значения функции.
5. Четность и нечетность функции.
6. Выпуклость графика функции.
7. Непрерывность функции.

V. Задание на уроках

§ 10, № 2 (в); 9 (а); 10 (б); 11 (а, б); 13 (в, г); 19 (а); 22 (в, г); 28 (а); § 11, № 1; 3 (а); 4 (б); 9 (а, б); 12(а); 14; 21 (а, в); 27.

VI. Задание на дом

§ 10, № 3 (г); 9 (б); 10 (а); 11 (в, г); 13 (а, б); 19 (б); 22 (а, б); 28 (г); § 11, № 2; 3 (г); 4 (в); 9 (в, г); 12 (б); 15; 21 (б, г); 28.

VII. Подведение итогов уроков