Зачетная работа по теме «Неравенства и системы неравенств»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся появляется возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные - в части В, еще сложнее - в части С. Каждая задача из части А оценивается в 1 балл, из В - в 2 балла, из С - в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В - 8 баллов и блока С - 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» - за 10 баллов, оценка «5» - за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного задания можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Решите неравенство $x+\frac{8-11x}{12}>\frac{7+x}{4}-\frac{5-x}{3}.$

2. Найдите все решения неравенства $\frac{2x^2}{9}\le\frac{x+3}{3},$ принадлежащие промежутку [-2; 2].

3. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{2x+5}{5}>\frac{5x+2}{2},\\ \frac{x+2}{5}<\frac{x+5}{2}.\end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $5\le 4-\frac{3}{4}x<7.$

5. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$?

6. Решите неравенство $2|x| - x \ge 6$.

7. При всех значениях параметра a решите неравенство $(x - 3)(x + a) \le 0$.

В

8. Решите неравенство $\left(\frac{\sqrt{35}+\sqrt{37}}{6}-2\right)(10+3x)\ge 0.$

9. Решите неравенство $(x + 3)(x - 2)(x - 5)^2 \le 0$.

10. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - (2a + 2)x + 3a + 7 > 0$ выполняется при всех значениях x?

11. Решите неравенство $|x + 3| + |x - 2| \ge 9$.

С

12. Решите неравенство $|4x^2-12x+5|(5x^2-12x+4)\ge 0.$

13. Решите двойное неравенство $\frac{4}{x}-3<\frac{1}{x^2}\le\frac{5}{x}+6.$

14. Найдите все пары (x; y) чисел x и y, для которых выполняется неравенство $x^2-6x+11\le\frac{4}{y^2+4y+6}.$

Вариант 2

А

1. Решите неравенство $\frac{13x-1}{15}-\frac{2x-1}{5}<x-\frac{x-2}{3}.$

2. Найдите все решения неравенства $\frac{3x^2}{4}\le\frac{4-5x}{2},$ принадлежащие промежутку [-1; 1].

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{2} > \dfrac{2x+3}{3}, \\ \dfrac{x+2}{3} < \dfrac{x+3}{2}. \end{cases}$

4. Решите двойное неравенство $3 < 4 - \dfrac{2}{3}x \le 5.$

5. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$?

6. Решите неравенство $x - 2|x| \le 3$.

7. При всех значениях параметра a решите неравенство $(x + 2)(x - a) \ge 0$.

В

8. Решите неравенство $\left(\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8} - 1\right)(4x - 13) \le 0.$

9. Решите неравенство $(x + 3)^2 (2 - x)(x - 5) \le 0$.

10. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 > 0$ выполняется при всех значениях x?

11. Решите неравенство $|x - 5| + |x + 4| \le 11$.

С

12. Решите неравенство $|3x^2 - 11x + 6|(6x^2 - 11x + 3) \ge 0.$

13. Решите двойное неравенство $\dfrac{3}{x} - 2 \le \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{6}{x} + 7.$

14. Найдите все пары (л'; у) чисел x и y, для которых выполняется неравенство $x^2 + 4x + 6 \le \dfrac{2}{y^2 - 6y + 10}.$

Ответы

Вариант 1

1. $x \in \left(-\infty; \dfrac{7}{6}\right).$

2. $x \in [-1,5; 2].$

3. $x \in (-7; 0).$

4. $x \in \left(-4; -\dfrac{4}{3}\right].$

5. $x \in (-\infty; -2) \cup [3; +\infty).$

6. $x \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty).$

7. При $a \in (-\infty; -3)$ $x \in [3; -a]$, при $a = -3$ $x = 3$, при $a \in (-3; +\infty)$ $x \in [-a; 3]$.

8. $x \in \left(-\infty; -\dfrac{10}{3}\right].$

9. $x \in [-3; 2] \cup \{5\}.$

10. $a \in (-2; 3).$

11. $x \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty).$

12. Выражение $|4x^2 – 12x + 5|$ обращается в нуль при $x_1 = 0,5$ и $x_2 = 2,5$ (и эти числа - решения неравенства). Для остальных x это выражение положительно. Поэтому неравенство равносильно неравенству $5x^2 – 12x + 4 \ge 0$, решение которого $x \in (-\infty; 0,4] \cup [2; +\infty)$. Точка $x = 2,5$ входит в промежуток $[2; +\infty)$. Поэтому решение исходного неравенства $x \in (-\infty; 0,4] \cup \{0,5\} \cup [2; +\infty).$

Ответ: $x \in (-\infty; 0,4] \cup \{0,5\} \cup [2; +\infty).$

13. Данное двойное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} \frac{4}{x}-3<\frac{1}{x^2}, \\ \frac{1}{x^2}\le\frac{5}{x}+6 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{4x^2-x-3}{x^2}<0, \\ 0\le\frac{6x^2+5x-1}{x^2}. \end{cases}$

Тогда решение неравенств $\begin{cases} x\in\left(-\frac{3}{4};\,0\right)\cup(0;\,1), \\ x\in(-\infty;\,-1]\cup\left[\frac{1}{6};\,+\infty\right). \end{cases}$ Получаем решение исходной системы неравенств $x\in\left[\frac{1}{6};\,1\right)$.

Ответ: $x\in\left[\frac{1}{6};\,1\right)$.

14. Оценим обе части неравенства. Для этого выделим полные квадраты по переменным x и y. Получаем: $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\ge2$ и $y^2+4y+6=(y+2)^2+2\ge2$, и тогда $\frac{4}{y^2+4y+6}=\frac{4}{(y+2)^2+2}\le\frac{4}{2}=2.$

Имеем: левая часть неравенства не меньше 2, а правая часть не больше 2. Поэтому исходное неравенство выполняется только при x = 3 и y = -2.

Ответ: (3; -2).

Вариант 2

1. $x\in\left(-\frac{8}{3};\,+\infty\right)$.
2. $x\in\left[-1;\,\frac{2}{3}\right]$.
3. $x\in(0;\,+\infty)$.
4. $x\in[-1,5;\,1,5]$.
5. $x\in(-\infty;\,-3]\cup(2;\,+\infty)$.
6. $x\in(-\infty;\,+\infty)$.
7. При $a\in(-\infty;\,-2)$ $x\in(-\infty;\,a]\cup[-2;\,+\infty]$, при $a=-2$ $x\in(-\infty;\,+\infty)$, при $a\in(-2;\,+\infty)$ $x\in(-\infty;\,-2]\cup[a;\,+\infty)$.
8. $x\in\left[\frac{13}{4};\,+\infty\right)$.
9. $x\in\{-3\}\cup[2;\,5]$.
10. $a\in(1;\,3)$.
11. $x\in[-5;\,6]$.

12. Выражение $|3x^2 - 11x + 6|$ обращается в нуль при $x_1 = 2/3$ и $x_2 = 3$ (и эти числа - решения неравенства). Для остальных x это выражение положительно. Поэтому неравенство равносильно неравенству $6x^2 - 11x + 3 \ge 0$, решение которого $x\in\left(-\infty;\,\frac{1}{3}\right]\cup[1,5;\,+\infty)$. Точка x = 3 входит в промежуток $[1,5; +\infty)$. Поэтому решение исходного неравенства $x\in\left(-\infty;\,\frac{1}{3}\right]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}\cup[1,5;\,+\infty)$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\,\frac{1}{3}\right]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}\cup[1,5;\,+\infty)$.

13. Данное двойное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} \frac{3}{x}-2\le\frac{1}{x^2}, \\ \frac{1}{x^2}<\frac{6}{x}+7 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0\le\frac{2x^2-3x+1}{x^2}, \\ 0<\frac{7x^2+6x-1}{x^2}. \end{cases}$

Тогда решение неравенств $\begin{cases} x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,0,5]\cup[1;\,+\infty), \\ x\in(-\infty;\,-1)\cup\left(\frac{1}{7};\,+\infty\right). \end{cases}$ Получаем решение исходной системы неравенств $x\in(-\infty;\,-1)\cup\left(\frac{1}{7};\,0,5\right]\cup[1;\,+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{7}; 0,5\right] \cup [1; +\infty).$

14. Оценим обе части неравенства. Для этого выделим полные квадраты по переменным x и y. Получаем: $x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2 \geq 2$ и $y^2 - 6y + 10 = (y - 3)^2 + 1 \geq 1$, и тогда $\frac{2}{y^2 - 6y + 10} = \frac{2}{(y-3)^2 + 1} \leq \frac{2}{1} = 2.$ Имеем: левая часть неравенства не меньше 2, а правая часть не больше 2. Поэтому исходное неравенство выполняется только при x = -2 и y = 3.

Ответ: (-2; 3).